



**TÀI LIỆU THUỘC KHÓA HỌC
“LIVE VIP 9+ TOÁN”**

**ĐĂNG KÝ HỌC EM INBOX THẦY TỰ
VẤN NHÉ!**

TỪ A – Z DẠNG BÀI MAX – MIN HÀM SỐ (Chuẩn Cấu Trúc Form SGK mới 2025)

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $[-1;1]$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 0$, tức là khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Do đó $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$.



- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 1$, tức là khi $x = 0$. Do đó $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với $x \in (-1;1)$, ta có: $y' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1;1]$:

x	-1	0	1
y'	+	0	-
y	0	1	0

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$; $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

Chú ý. Trong thực hành, ta cũng dùng các kí hiệu $\min_D y, \max_D y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D . Do đó, trong Ví dụ 1 ta có thể viết

$\min_{[-1;1]} y = y(-1) = y(1) = 0$; $\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Tính các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0	1	$+\infty$
y'		0	
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = 0$; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

Ví dụ 3. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.**Lời giải**

Gọi $x(\text{cm})$ là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa. Điều kiện: $0 < x < 30$. Khi cắt bỏ bốn hình vuông nhỏ có cạnh $x(\text{cm})$ ở bốn góc và gấp lên thì ta được một chiếc hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông với độ dài cạnh bằng $(60 - 2x)(\text{cm})$ và chiều cao bằng $x(\text{cm})$. Thể tích của chiếc hộp này là

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x \text{ (cm}^3\text{)}. \text{ Ta có:}$$

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600; V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn điều kiện) hoặc } x = 30 \text{ (loại).}$$

Lập bảng biến thiên:

x	0	10	30	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	16 000	0	

Vậy để thể tích của chiếc hộp là lớn nhất thì độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ phải cắt là 10 cm.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có: $M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \sqrt{2} \text{ (vì } x \in [0; 4]); y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0;4]} y = y(4) = 195; \min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1.$$

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \cos x - \sin x; y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{4} \text{ (vì } x \in [0; 2\pi]);$$

$$y(0)=1; y(2\pi)=1; y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}. \text{ Do đó: } \max_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}; \min_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}.$$

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1.10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 4x + 3$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên $(1; +\infty)$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

Lời giải

a) Ta có: $y = -x^2 + 4x + 3 = -(x-2)^2 + 7 \leq 7$ với mọi số thực x .

Dấu "=" xảy ra khi $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Do đó, $\max f(x) = f(2) = 7$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

b) GTLN, GTNN của $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(tm) \\ x = \frac{4}{3}(tm) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	1		$-\frac{5}{27}$	$+\infty$

Do đó, $\min_{[0;+\infty)} y = y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{27}$, hàm số không có giá trị lớn nhất.

c) Ta có: $y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ (loại) hoặc $x = 1 + \sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Ta có bảng biến thiên :

x	1	$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$	$2\sqrt{2}$		$+\infty$

Do đó, $\min_{(1;+\infty)} y = y(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, hàm số không có giá trị lớn nhất trên $(1;+\infty)$.

d) Tập xác định của hàm số là: $D = [0; 2]$

$$y' = \frac{(4x - 2x^2)'}{2\sqrt{4x - 2x^2}} = \frac{4 - 4x}{2\sqrt{4x - 2x^2}} = \frac{2(1-x)}{\sqrt{4x - 2x^2}}. \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	1	2		
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow \sqrt{2}$	$\searrow 0$		

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $y(0) = 0; y(1) = \sqrt{2}; y(2) = 0$. Do đó, $\max_{[0;2]} y = y(1) = \sqrt{2}, \min_{[0;2]} y = y(0) = y(2) = 0$

1.11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

- a) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; b) $y = xe^{-x}$;
c) $y = x \ln x$; d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Có $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{\mathbb{R}} y = y(-1) = y(1) = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Có $y' = e^{-x} - xe^{-x}; y' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{\mathbb{R}} y = y(1) = \frac{1}{e}$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

c) Tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.

Có $y' = \ln x + 1; y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{(0;+\infty)} y = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

d) Tập xác định của hàm số là $[1; 3]$.

Có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 2$

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	1	2	3		
y'		+	0	-	
y	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{[1;3]} y = y(1) = y(3) = \sqrt{2}; \max_{[1;3]} y = y(2) = 2$.

1.12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x + 3$ trên đoạn $[-1; 2]$;

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$;

c) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$;

d) $y = (x^2 - x)e^x$ trên đoạn $[0; 1]$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = 6x^2 - 6, y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn)

$y(-1) = 7, y(1) = -1, y(2) = 7$. Do đó, $\max_{[-1;2]} y = y(2) = y(-1) = 7, \min_{[-1;2]} y = y(1) = -1$

b) Ta có $y' = 4x^3 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ (loại) hoặc $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ vì $x \in [0; 3]$.

Có $y(0) = 2; y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{1}{4}; y(3) = 56$. Do đó $\max_{[0;3]} y = y(3) = 56; \min_{[0;3]} y = y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

c) Ta có $y' = 1 - 2\cos 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6}$ vì $x \in [0; \pi]$.

Có $y(0) = 0$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y(\pi) = \pi$.

Do đó $\max_{[0; \pi]} y = y(\pi) = \pi$; $\min_{[0; \pi]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Có $y' = (2x-1)e^x + (x^2-x)e^x = (x^2+x-1)e^x$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2+x-1)e^x = 0$

$\Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (loại) hoặc $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn) vì $x \in [0; 1]$

Có $y(0) = 0$; $y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = (2-\sqrt{5})e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$; $y(1) = 0$

Do đó $\max_{[0; 1]} y = y(0) = y(1) = 0$; $\min_{[0; 1]} y = y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = (2-\sqrt{5})e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

1.13. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Nửa chu vi hình chữ nhật là: $24 : 2 = 12(\text{cm})$

Gọi chiều dài hình chữ nhật là $x(\text{cm}) (0 < x < 12)$.

Khi đó chiều rộng hình chữ nhật là $12 - x (\text{cm})$.

Diện tích hình chữ nhật là $x(12-x) = 12x - x^2 (\text{cm}^2)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 12x - x^2 (0 < x < 12)$.

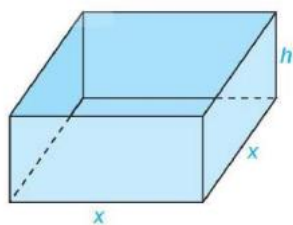
Có $y' = 12 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0	6	12
y'		+	0
y	0	36	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có diện tích lớn nhất hình chữ nhật là 36cm^2 khi nó là hình vuông có cạnh bằng 6cm.

1.14. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

Lời giải

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x (cm, $x > 0$) và chiều cao là h (cm, $h > 0$)

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$ (cm) (điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4}$ (cm^3). Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\frac{x^3}{4} + 27x$ ($0 < x < \sqrt{108}$)

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}$, $V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $0 < x < \sqrt{108}$)

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0	6	$\sqrt{108}$
V'		+	0
V			-
	0	108	$y(\sqrt{108})$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6\text{cm}$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3(\text{cm})$.

1.15. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi r, h lần lượt là bán kính hình tròn đáy và chiều cao của hình trụ ($r, h > 0$).

Khi đó ta có $V = \pi r^2 h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

Diện tích mặt trên và mặt dưới của bình là $2\pi r^2$ (cm^2).

Chi phí vật liệu sản xuất mặt trên và mặt dưới là $1,2 \cdot 2\pi r^2 = 2,4\pi r^2$ (nghìn đồng).

Diện tích mặt bên của bình là $2\pi rh$ (cm²).

Tổng chi phí là: $2,4\pi r^2 + 1,5\pi rh = 2,4\pi r^2 + \frac{1500}{r}$ (nghìn đồng).

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2,4\pi r^2 + \frac{1500}{r}, r > 0$.

Có $y' = 4,8\pi r - \frac{1500}{r^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 4,8\pi r - \frac{1500}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}} \approx 4,6$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

r	0	4,6	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	485,6	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình nhỏ nhất khoảng 485,6 nghìn đồng khi r khoảng 4,6 cm và h khoảng 15 cm.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN

1. BÀI TẬP MẪU

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ như hình. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm giá trị của M ?

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y	0		5		1		4

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $M = f(0)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ có bảng biến thiên như hình bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Tính tổng $M + m$?

x	-2	0	1	3		
y'		+	0	-		+
		2		3		
y						
	-2		1			

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\begin{cases} M = 3 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 1$.

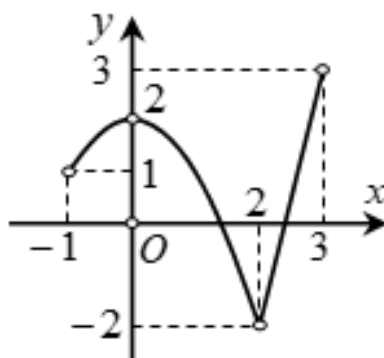
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 4]$ như hình dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 4]$. Tính giá trị của $M + m$?

x	-1	1	3	4
y'	+	0	-	0
y	-24	-4	-8	-4

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\begin{cases} M = -4 \\ m = -24 \end{cases} \Rightarrow M - m = -28.$

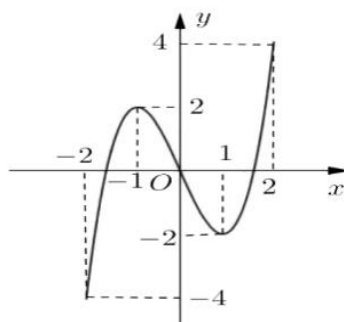
Câu 4: (Đề thi tham khảo 2019 – Câu 16) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta được: $\begin{cases} M = 3 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow M - m = 5.$

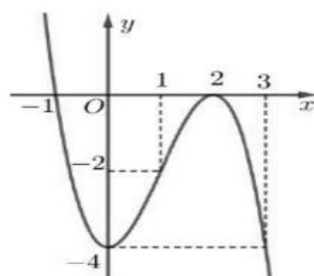
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M - m$ bằng:



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta được: $\begin{cases} M = 4 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 8.$

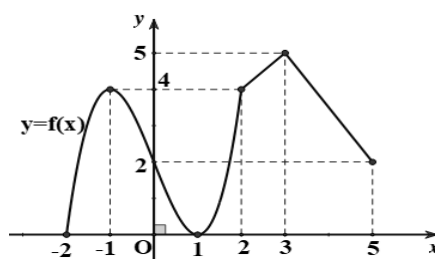
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng:



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta được: $\begin{cases} M = 0 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M + m = -4.$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(2\cos 5x + 1)$. Giá trị của $M - 2m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

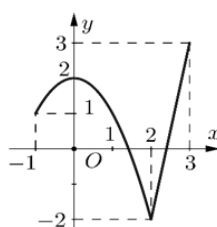
Ta có $-1 \leq \cos 5x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\cos 5x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\cos 5x + 1 \leq 3.$

Đặt $t = 2\cos 5x + 1$ với $x \in [-2; 3]$ thì $t \in [-1; 3].$

Khi đó, $y = f(2\cos 5x + 1) = f(t)$ với $t \in [-1; 3].$

Suy ra: $\begin{cases} M = 5 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow M - 2m = 5.$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$?



Lời giải

Ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3\sin^2 x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 3\sin^2 x - 1 \leq 2.$

Đặt $t = 3\sin^2 x - 1$ với $x \in [-1; 3]$ thì $t \in [-1; 2].$

Khi đó, $y = f(3\sin^2 x - 1) = f(t)$ với $t \in [-1; 2]$.

Suy ra: $\text{Max}_{[-1;3]} f(x) = 2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\cos x| - 1)$?

x	-1	0	2	3			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			2		-2		3

Lời giải

Ta có $0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3|\cos x| \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 3|\cos x| - 1 \leq 2$.

Đặt $t = 3|\cos x| - 1$ với $x \in [-1; 3]$ thì $t \in [-1; 2]$.

Khi đó, $y = f(3|\cos x| - 1) = f(t)$ với $t \in [-1; 2]$.

Suy ra: $\text{Max}_{[-1;3]} f(x) = 2$.

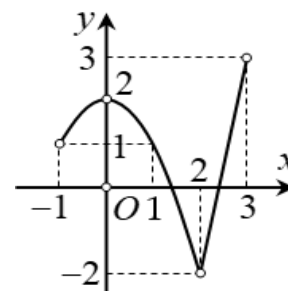
Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 0]$. Giá trị $M - m$ bằng?

Lời giải

Đặt $t = f(x)$ với $x \in [-1; 0]$ thì $f(x) \in [1; 2]$.

Khi đó, $y = f(f(x)) = f(t)$ với $t \in [1; 2]$.

Suy ra: $\begin{cases} M = 1 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow M - m = 3$.



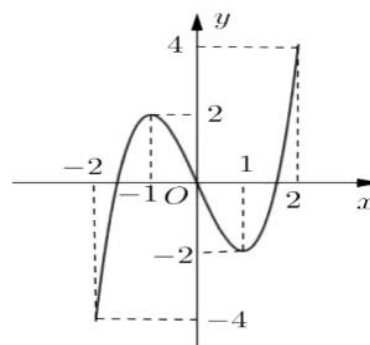
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính giá trị của $M - m$?

Lời giải

Đặt $t = f(x)$ với $x \in [-1; 1]$ thì $f(x) \in [-2; 2]$.

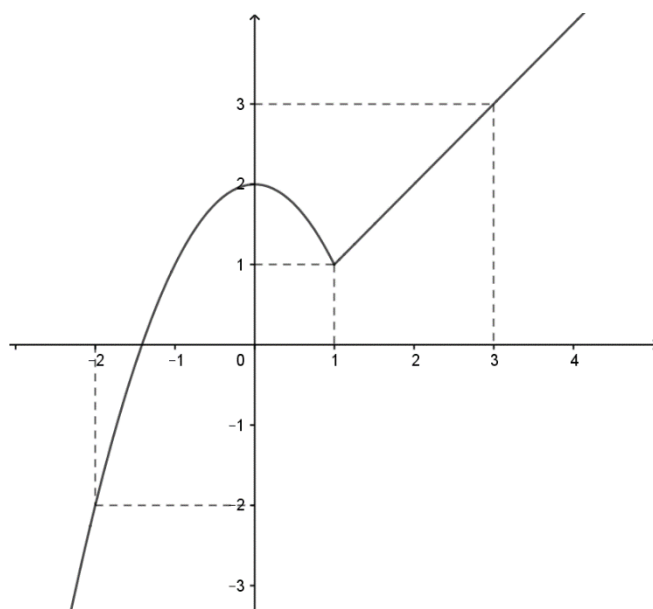
Khi đó, $y = f(f(x)) = f(t)$ với $t \in [-2; 2]$.

Suy ra: $\begin{cases} M = 4 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 8$.



2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:

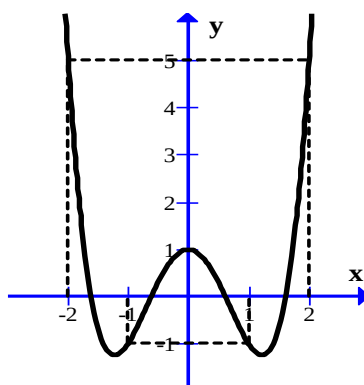


Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2, 3]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $\min_{[-2, 3]} f(x) = -2$ và $\max_{[-2, 3]} f(x) = 3$.

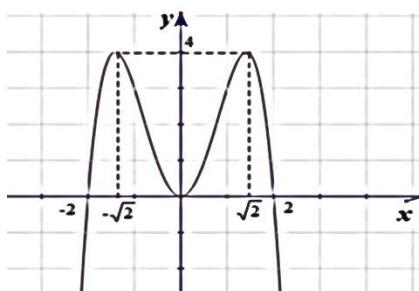
Bài 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1; 2]$?



Lời giải

Từ đồ thị ta có $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 5$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$?



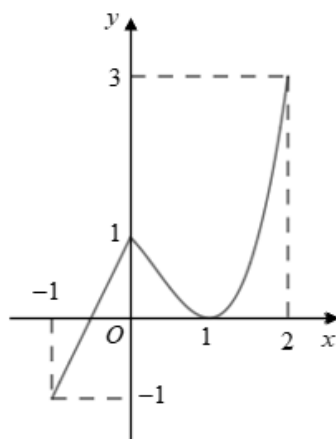
Lời giải

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\max_{[0;2]} f(x) = 4$.

Bài 4. (Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - Lần 1 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$. Hãy tính giá trị của $M.m$?

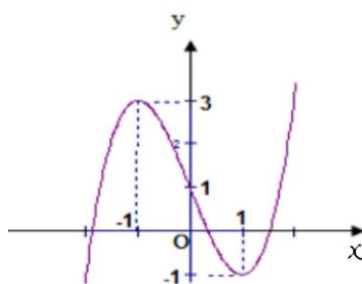


Lời giải

Từ đồ thị ta có $M = 3$ và $m = -1$.

Vậy $M.m = -3$.

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Từ đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$?



Lời giải

Từ đồ thị suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = 3$ tại $x = -1$.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

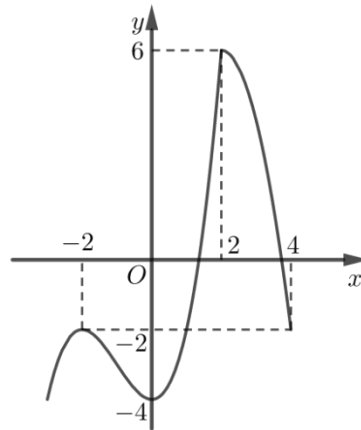
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	3	0		$+\infty$	

Cho biết giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ là bao nhiêu?

Lời giải

Từ BBT suy ra $\min_{[-1;1]} f(x) = 0$ tại $x = \pm 1$.

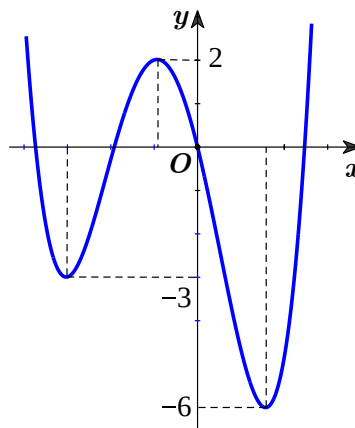
Bài 7. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$. Hãy tìm giá trị của $m + M$?



Lời giải

Trên đoạn $[-2;4]$, hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại $x = 0$, giá trị lớn nhất bằng 6 tại $x = 2$ nên $m + M = -4 + 6 = 2$.

Bài 8. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên?

Lời giải

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -6 .

Bài 9. (Chuyên Vĩnh Phúc - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

và có bảng biến thiên dưới đây:

x	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	0

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên:

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy $\max_{\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)} y = \frac{1}{3}$.

Bài 10. (THPT Đoàn Thượng - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					
	$-\infty$	4		-3	$+\infty$

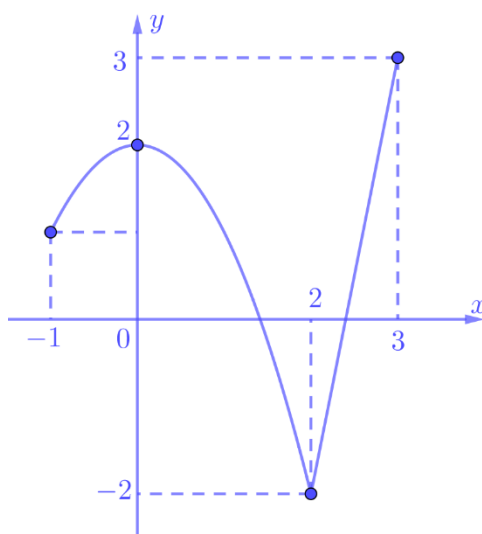
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Do đó hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Bài 11. (THPT Đoàn Thượng - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình bên



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của M bằng:

Lời giải

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $M = 3$ khi $x = 3$.

Bài 12. (THPT Nghĩa Hưng A - Nam Định) Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong $[-1; 3]$ cho bởi hình dưới đây.

x	-1		0		2		3
y'		+	0	-	0	+	
y			5				4
	0				1		

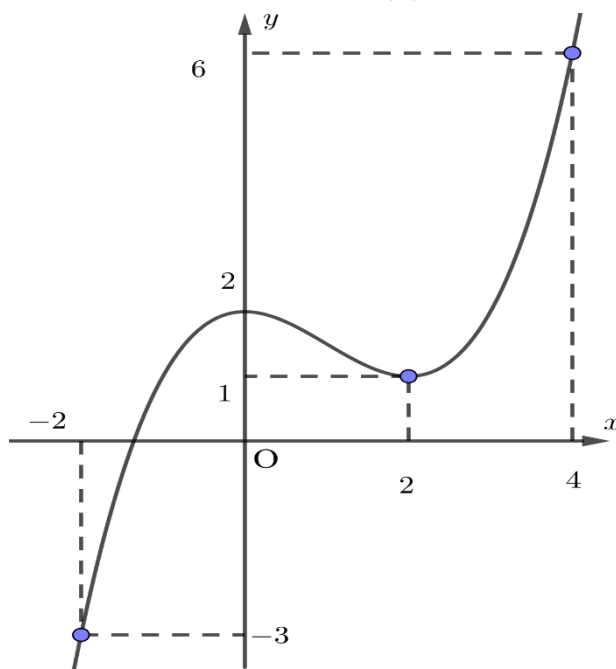
Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 5.

Vậy $M = 5$.

Bài 13. (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ như hình vẽ.

Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2 \Rightarrow y_{\min} = f(2) = 1$.

Bài 14. (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

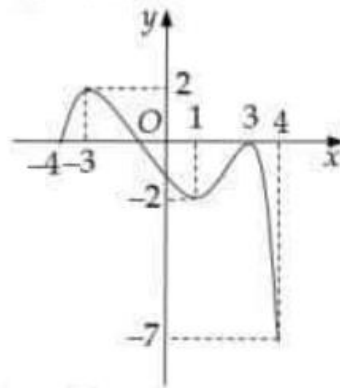
x	$-\infty$	-1		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	-	
y			2			3		
	-5			-4			-1	

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$; $y(-2) = 4$; $y(0) = 2$; $y(1) = 5$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Bài 18. (THPT MARICURIE - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$.

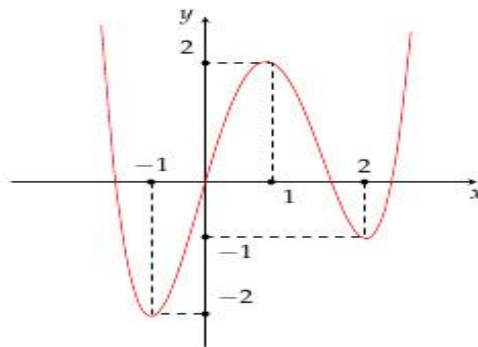


Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-4; 4]$ tại điểm nào?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-4; 4]$ tại $x = -3$.

Bài 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau

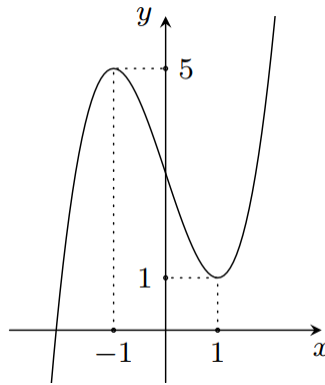


Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng -2 .

Bài 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau:

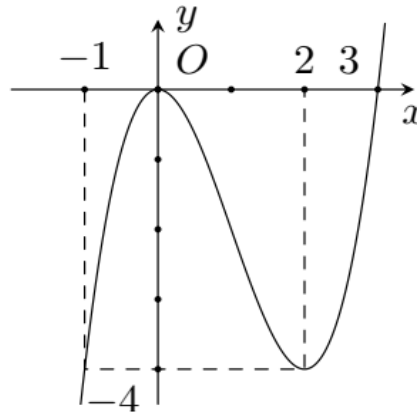


Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là 5 trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài 21. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 3 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

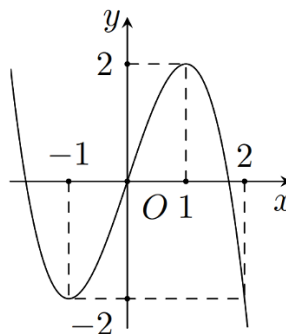


Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là 0 trên đoạn $[-1; 2]$.

Bài 22. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 4 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ là 2.

Bài 23. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 05 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ.

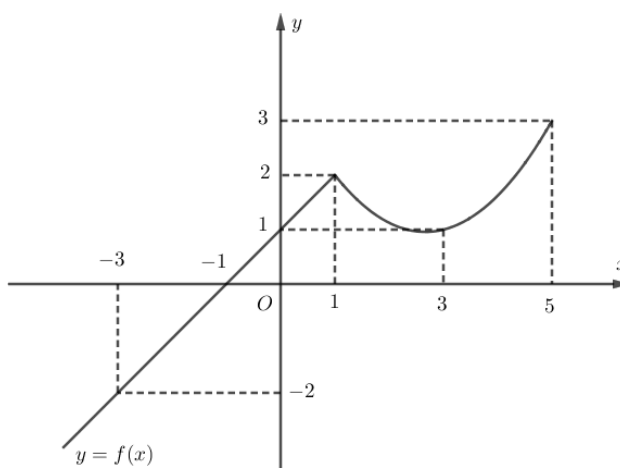
x	-1	0	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	5	1	4	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max_{[-1; 3]} f(x) = 5$ đạt tại $x = 0$.

Bài 24. (SGD Thanh Hóa – KSCL Lần 01 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ.

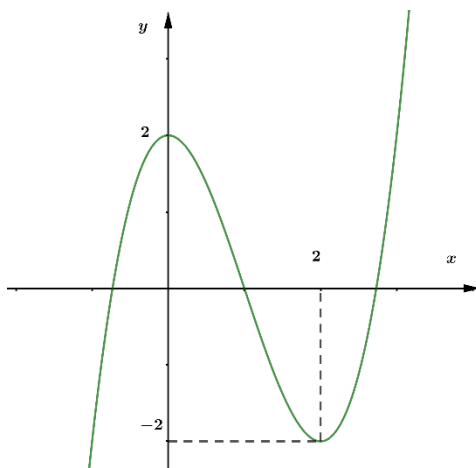


Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$ bằng 3 đạt được tại $x = 5$.

Bài 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$.

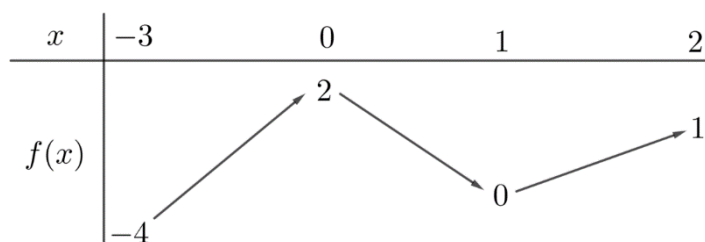


Hãy tìm giá trị của $M + n$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị, $m = -2$; $M = 2$; $M + m = 0$.

Bài 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$.



Tính $M.m$?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M = 2$ và $m = -4$.

Từ đó suy ra $M.m = 2.(-4) = -8$.

Bài 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Hàm số đạt giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ tại điểm nào?

Lời giải

Từ bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$:

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	0	0	-
$f(x)$		$f(2)$	

Arrows indicate the function values at the critical points: from $f(2)$ at x=2, the function decreases as x approaches $+\infty$.

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ đạt được tại $x = 2$.

Bài 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0 .

x	0	4	8	
$f'(x)$		+	0	–
$f(x)$	0	16	0	

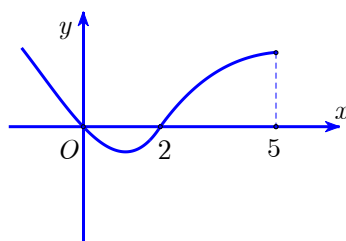
Hãy cho biết $x_0 \cdot f(x_0)$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0) = 16$ tại $x_0 = 4$.

Nên $x_0 \cdot f(x_0) = 16 \cdot 4 = 64$.

Bài 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây.



Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$?

Lời giải

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$

x	0	2	5	
$f'(x)$	0	–	0	+
$f(x)$				

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0;5]} f(x) = f(2); f(2) < f(3)$

Mà $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ nên $f(5) > f(0)$

Vậy $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Bài 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$
y	5		4	

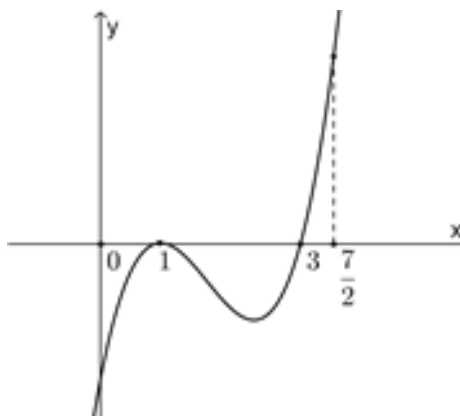
$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2 -1

Tìm điểm cực đại và điểm tiểu của đồ thị hàm số trên?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2; 4)$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1; -2)$.

Bài 31. (SGD Nam Định - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm nào?

Lời giải

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(3)$	$+\infty$

Quan sát BBT ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x = 3$.

Bài 32. (SGD Gia Lai – KSCL Lần 1 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

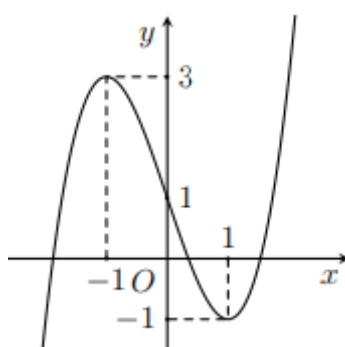
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-1	$+\infty$	

Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-\infty; 1)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên suy ra $\max_{(-\infty; 1)} f(x) = f(0) = 1$.

Bài 33. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 4 - Năm 2021 - 2022) Đồ thị của hàm số $f(x)$ có dạng đường cong trong hình vẽ bên.



Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

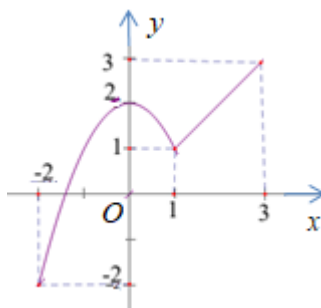
Tính $P = M - 2m$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có: $M = 3, m = -1$

Vậy $P = M - 2m = 3 - 2 \cdot (-1) = 5$.

Bài 34. Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in [-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$.



Tính giá trị $M + m$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{[-2; 3]} f(x) = 3$ đạt tại $x = 3 \Rightarrow M = 3$.

$\min_{[-2; 3]} f(x) = -2$ đạt tại $x = -2 \Rightarrow m = -2$.

Vậy $M + m = 3 + (-2) = 1$.

Bài 35. (THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 01 - năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$						

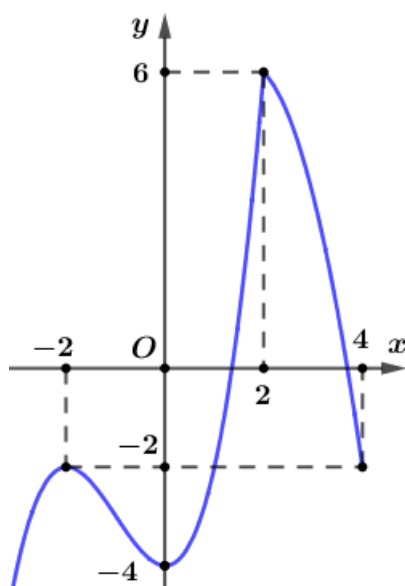
$+\infty \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} 2022 \xrightarrow{\quad} m$

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất cần $0 \leq m < 2022$. Suy ra có 2022 giá trị.

Bài 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 4]$.



Tính giá trị của $M^2 + m^2$?

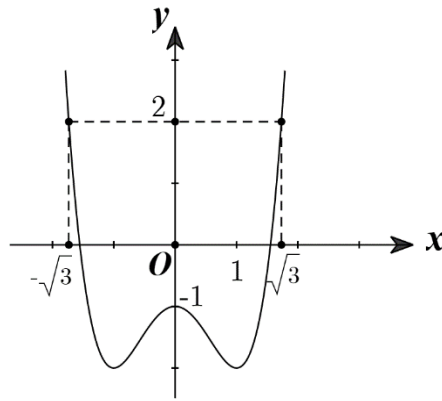
Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta thấy $-4 \leq y \leq 6$ khi $-2 \leq x \leq 4$.

Do đó $M = \max_{[-2; 4]} f(x) = 6$ tại $x = 2$ và $m = \min_{[-2; 4]} f(x) = -4$ tại $x = 0$.

$\Rightarrow M^2 + m^2 = 6^2 + (-4)^2 = 52$.

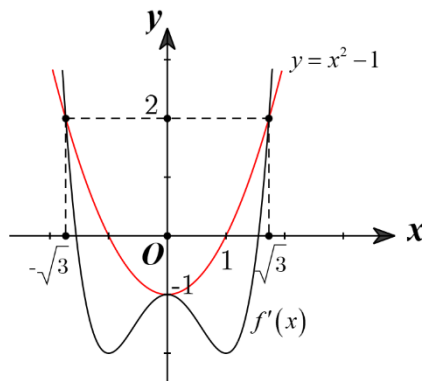
Bài 37. (SGD Thanh Hóa – KSCL Lần 01 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)$ trên $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$?

Lời giải

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$.

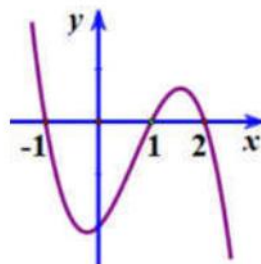


Dựa vào đồ thị suy ra $f'(x) \leq x^2 - 1, \forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \Leftrightarrow h'(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Suy ra hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Vậy $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$.

Bài 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.

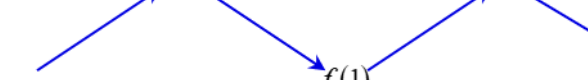


Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là $f(1)$.

Bài 39. (Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

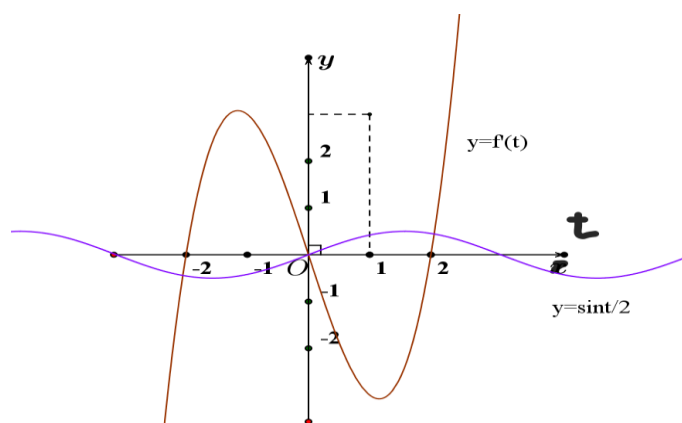
x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	+	0	-	0	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$?

Lời giải

$$g'(x) = 2f'(2x) - 2\sin x \cdot \cos x = 2f'(2x) - \sin 2x. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow t \in [-2; 2].$$

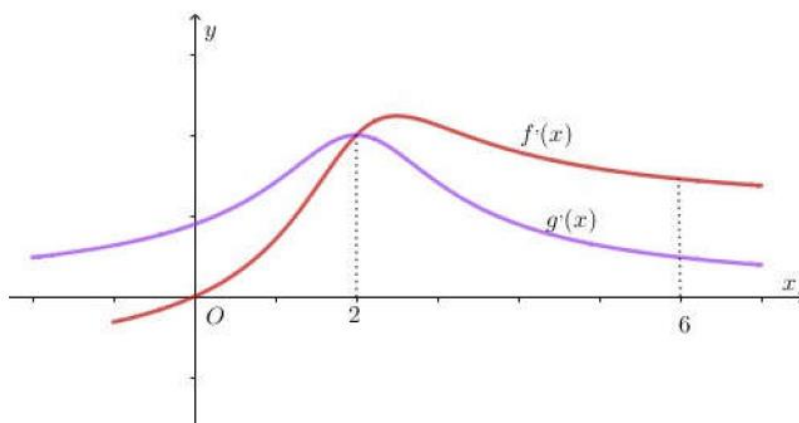
$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2f'(t) - \sin t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = \frac{\sin t}{2}, \forall t \in [-2; 2].$$



t	-2	-1	0	1	2			
$g'(t)$		+		+	0	-		-
$g(t)$	$g(-2)$ $\nearrow$ $g(0)$ $\searrow$ $g(2)$							

Vậy giá trị lớn nhất là $g(0) = f(0)$.

Bài 40. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$?

Lời giải

Ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Do đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow x = 2$.

x	0	2	6
h'		0	+
h	$h(0)$	$h(2)$	$h(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Mặt khác: $f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$.

Vậy $\max_{[0;6]} h(x) = h(6)$.

Bài 41. (SGD Nam Định - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
y'		0	+	0
y	$+\infty$		0	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$?

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8$

$= 2(2 - x)f'(4x - x^2) + (x - 4)(x - 2)$

$= (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x]$.

Ta thấy $3 \leq 4x - x^2 \leq 4, \forall x \in [1;3] \Rightarrow f'(4x - x^2) > 0$.

Hơn nữa, $4 - x > 0, \forall x \in [1;3]$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0$.

Do đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	1	2	3	
g'		+	0	-
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	

Vậy $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 0 + 7 = 7$.

DẠNG TOÁN 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN



Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Phương pháp:

Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 2. Tính $f(a), f(b), f(x_i)$.

Bước 3. Kết luận:
$$\begin{cases} \max_{[a;b]} f(x) = \max \{ f(a); f(b); f(x_i) \} \\ \min_{[a;b]} f(x) = \min \{ f(a); f(b); f(x_i) \} \end{cases}$$

🔍 **Lưu ý:**

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$.

1. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. (Đề thi THPT 2020 – Mã đề 101 – Câu 36) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in [2; 19] \\ x = -2\sqrt{2} \notin [2; 19] \end{cases}$

$y(2) = -40, y(19) = 6403, y(2\sqrt{2}) = -32\sqrt{2}$.

Suy ra: $\min_{[2; 19]} y = -32\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. (Đề thi THPT 2021 – Mã đề 103 – Câu 36) Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm ?

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin [0;3] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } y(0) = 4, y(3) = 22, y(1) = 2$$

Vậy hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ tại điểm $x = 1$.

Ví dụ 3. (Đề thi THPT 2021 – Mã đề 104 – Câu 37) Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm ?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{cases}.$$

$$y(-1) = 3; y(0) = 1; y(2) = 21.$$

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x = 0$.

Ví dụ 4. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 101 – Câu 30) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng ?

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$, ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2;2] \\ x = 3 \notin [-2;2] \end{cases}.$$

$$f(-2) = 8; f(-1) = 15; f(2) = -12.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = 15.$$

Ví dụ 5. (Lương Tài 2 - Bắc Ninh - Lần 1 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2		-2		$2\sqrt{5}$
	0						

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số ?

Lời giải

Dựa vào BBTta thấy $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = -2$ khi $x = 1$ là đúng.

Ví dụ 6. (Đề thi THPT 2018 – Mã đề 101 – Câu 23) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng:

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \sqrt{2} \in [-2; 3] \\ x = -\sqrt{2} \in [-2; 3] \end{cases}$$

Ta có: $y(-2) = 9; y(3) = 54; y(0) = 9; y(\sqrt{2}) = 5; y(-\sqrt{2}) = 5$.

Vậy $\max_{[-2; 3]} y = y(3) = 54$. Chọn D.

Ví dụ 7. (Chuyên Bắc Giang - Tháng 11- 2019) Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Tính giá trị của $4M - 2m$ bằng

Lời giải

Ta có $y' = \frac{7}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in [0; 2]$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

Suy ra $M = \max_{[0; 2]} y = f(2) = \frac{5}{4}$ và $m = \min_{[0; 2]} y = f(0) = -\frac{1}{2}$.

Vậy $4M - 2m = 4 \cdot \frac{5}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6$.

Ví dụ 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{-2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-5}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in [1; 4]$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 4]$.

Suy ra $M = \max_{[1;4]} y = f(1) = \frac{1}{2}$ và $m = \min_{[1;4]} y = f(4) = -1$.

Ví dụ 9. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 101) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Đặt $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Khi đó $f(1) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}$, $f(2) = 5$

Vậy $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 4]$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ (loại)

Suy ra $y(2) = 7$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2;4]} y = 6$ tại $x = 3$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$ trên đoạn $[-4; 1]$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 10}} < 0$ với mọi $x \in [-4; 1]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $[-4; 1]$.

Vậy $f_{\min} = f(1) = \sqrt{7}$.

Ví dụ 12. Hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x bằng bao nhiêu?

Lời giải

TXĐ: $D = [-2; 2]$

Ta có $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $\forall x \in (-2; 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng xét dấu

x	-2	0	2
y'		+	-
y			

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \pm 2$.

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x + \sqrt{8 - 2x^2}$ trên tập xác định của nó?

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $D = [-2; 2]$.

Ta có $y' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{8 - 2x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 8 - 2x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \in [-2; 2].$$

$$y(2) = 4; y(-2) = -4; y\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = 2\sqrt{6}.$$

Vậy $M = \max_{[-2; 2]} y = 2\sqrt{6}.$

Ví dụ 14. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$.

Khi đó giá trị của biểu thức $M + m$ bằng:

Lời giải

Ta có: $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2 = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1.$

* Đặt $t = \sin x$. Suy ra $y = t^3 + 2t^2 + t + 1, t \in [-1; 1]$

* $y' = 3t^2 + 4t + 1$

* $y' = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = -\frac{1}{3}$

* Ta có $y(-1) = 1; y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}; y(1) = 5$

Suy ra: $M = 5$ và $m = \frac{23}{27} \Rightarrow M + m = \frac{158}{27}$.

Ví dụ 15. (THPT Hoàng Hóa 2 - Thanh Hóa - Lần 1 - 2019) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 2]$ bằng -2 .

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Nếu $m \in [1; 2]$ thì hàm số không thể đạt giá trị lớn nhất bằng -2 .

Xét $m \notin [1; 2]$ suy ra $\max_{[1;2]} f(x) = f(1) = \frac{m+1}{1-m} = -2 \Leftrightarrow m = 3$.

Ví dụ 16. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 101 – Câu 33) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị thực của m thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2; 4]$ suy ra

$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2; 4]$ suy ra

$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ suy ra $m > 4$.

Ví dụ 17. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 103 – Câu 40) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min_{[0;2]} f(x)$ bằng?

Lời giải

Ta có $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 4(a+4)x = 4x[ax^2 + (a+4)]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax^2 + (a+4) = 0(*) \end{cases}$

Điều kiện cần để $\max_{[0;2]} f(x) = f(1)$ là PT $(*)$ có nghiệm $x=1 \Leftrightarrow a + (a+4) = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Khi đó $f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 8x$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Ta có $f(0) = -1; f(2) = -17; f(1) = 1$.

Vậy $\max_{[0;2]} f(x) = f(1) = 1$ và $\min_{[0;2]} f(x) = -17$ khi $x = 2$.

Ví dụ 18. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$, $g'(x) = 3x^2 - 3$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Trên $[0; 2]$ ta có $g(0) = 2m - 1$; $g(1) = 2m - 3$; $g(2) = 1 + 2m$.

Khi đó $\max_{[0;2]} y = \max \{|2m - 3|; |2m + 1|\} = \frac{|2m - 3 + 2m + 1|}{2} + \frac{|2m - 3 - (2m + 1)|}{2} = |2m - 1| + 1 \geq 1$

Suy ra để GTLN của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất thì $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 105) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 8x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2; 3] \end{cases}$

$f(-2) = 5$; $f(0) = 5$; $f(-\sqrt{2}) = 1$; $f(\sqrt{2}) = 1$; $f(3) = 50$.

Vậy $\max_{[-2;3]} f(x) = 50$.

Bài 2. (Đề thi THPT 2019 – Mã đề 101 – Câu 20) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng?

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3]$

$f(-3) = -16$; $f(3) = 20$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$

Vậy $\max_{[-3;3]} f(x) = 20$.

Bài 3. (Đề thi THPT 2019 – Mã đề 102 – Câu 17) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng?

Lời giải

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$f(-3) = -16; f(3) = 20; f(-1) = 4; f(1) = 0.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-3; 3]} f(x) = -16.$$

Bài 4. (Đề thi THPT 2021 – Mã đề 101 – Câu 31) Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = f(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin [0; 3] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0; f(1) = 2; f(3) = -18.$$

$$\text{Vậy hàm số } y = -x^3 + 3x \text{ đạt giá trị lớn nhất tại điểm } x = 1.$$

Bài 5. (Đề thi THPT 2021 – Mã đề 102 – Câu 35) Trên đoạn $[-2; 1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Lời giải

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-2; 1] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-2) = -21, y(0) = -1, y(1) = -3.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2; 1]} y = -1 \text{ tại } x = 0.$$

Bài 6. (Chuyên ĐH Vinh - Giữa HK1 - 2019) Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính tổng $m + 2M$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x - 9; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$\text{Tính: } y(0) = 1; y(3) = -26; y(4) = -19$$

$$\Rightarrow m + 2M = -24.$$

Bài 7. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 104 – Câu 20) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

$$\text{Lại có } y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}; y(1) = 3 \text{ và } y(2) = 5.$$

$$\text{Vậy } \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} y = y(1) = 3.$$

Bài 8. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 102 – Câu 31) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-2; 2) \\ x = 3 \notin (-2; 2) \end{cases}.$$

$$\text{Lại có } f(-2) = 8; f(-1) = 15 \text{ và } f(2) = -12.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2; 2]} f(x) = f(-1) = 15.$$

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[0; 1]} y = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0.$$

$$\text{Do đó hàm số đã cho luôn đồng biến trên } [0; 1]. \Rightarrow \min_{[0; 1]} y = y(0) \Leftrightarrow 5 = m + 1 \Leftrightarrow m = 4.$$

Bài 10. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 118 – Câu 36) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$$\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}. \text{ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số } m?$$

Lời giải

Ta có $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

*Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

*Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2]$,

suy ra $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

*Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$,

suy ra $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = y(2) + y(1) \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$.

Bài 11. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 101 – Câu 40) Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ với m là tham số thực. Nếu $\min_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\max_{[0;3]} f(x)$ bằng?

Lời giải

Ta có $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4(m-1)x^3 - 4mx = 4x[(m-1)x^2 - m]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (m-1)x^2 - m = 0(*) \end{cases}$

Điều kiện cần để $\min_{[0;3]} f(x) = f(2)$ là PT (*) có nghiệm $x = 2 \Leftrightarrow 4(m-1) - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

Khi đó $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{16}{3}x$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \\ x = -2 \notin [0; 3] \end{cases}$

Ta có $f(0) = 1; f(3) = 4; f(2) = -\frac{13}{3}$.

Vậy $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = -\frac{13}{3}$ và $\max_{[0;3]} f(x) = 4$ khi $x = 3$.

Bài 12. (GK1 - K12 - THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - Năm 2021 - 2022) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{11-2x}$ trên đoạn $[1; 5]$ bằng

Lời giải

Hàm số $f(x) = \sqrt{11-2x}$ liên tục và xác định trên đoạn $[1; 5]$.

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{11-2x}}, f'(x) < 0 \forall x \in [1; 5] \Rightarrow \max_{[1;5]} f(x) = f(1) = 3$.

Bài 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

Lời giải

Xét hàm số trên $[-1; 3]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3].$$

$$\text{Ta có: } y(-1) = 2\sqrt{5}; y(3) = 2\sqrt{2}; y(1) = 2 \Rightarrow \underset{[-1;3]}{\text{Min}} f(x) = f(1) = 2.$$

Bài 14. (Sở GD Bình Dương - HK1 - 2019) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ lần lượt là?

Lời giải

Hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ xác định khi và chỉ khi $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } y(-2) = -2, y(2) = 2, y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \underset{[-2;2]}{\text{Max}} y = 2\sqrt{2}; \underset{[-2;2]}{\text{Min}} y = -2.$$

Bài 15. Gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{4-x^2}$ lần lượt là M và m . Giá trị của biểu thức $T = M^2 + 6m$ tương ứng bằng?

Lời giải

Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

$$\text{Đạo hàm của hàm số: } y' = 3 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{3\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x = 3\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ x^2 = 9(4-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Giá trị hàm số tại các điểm đặc biệt: } y\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) = 2\sqrt{10}; y(-2) = -6; y(2) = 6.$$

$$\text{Vì hàm số liên tục trên } [-2; 2] \text{ nên } M = 2\sqrt{10}; m = -6.$$

$$\text{Vậy } T = M^2 + 6m = 4.$$

Bài 16. Cho hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?**Lời giải**

$$\text{TXĐ } D = [-4; 4].$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4+x} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = 0(n).$$

$$\text{Ta có } y(-4) = 2\sqrt{2}; y(4) = 2\sqrt{2}; y(0) = 4.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-4;4]} y = 4.$$

Bài 17. (Chu Văn An - Hà Nội - Giữa HK1 - 2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.**Lời giải**

$$\text{Ta có TXĐ: } D = [-1; 3]$$

$$\text{Ta thấy } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+1)(3-x)}}$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

$$\text{Ta có } f(-1) = 2; f(1) = 2\sqrt{2}; f(3) = 2.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}.$$

Bài 18. (THPT Trần Phú - Hồ Chí Minh - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi

$M = \frac{a}{e^b} (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N})$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$?

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = e^x(x^2 + 2x - 3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [-5; -2] \\ x = -3 \in [-5; -2] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-5) = \frac{22}{e^5}; y(-3) = \frac{6}{e^3}; y(-2) = \frac{1}{e^2}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-5; -2]} y = \frac{6}{e^3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow a + b = 9.$$

Bài 19. (Chuyên Vĩnh Phúc - Lần 2 - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x + 1}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là?

Lời giải

$$\text{Đặt } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$$

$$\text{Hàm số đã cho trở thành } f(t) = \frac{2t+3}{t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-1}{(t+1)^2} < 0, \forall t \in [0; 1].$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2}.$$

Bài 20. (THPT Lê Thánh Tông - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x + 2}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ là?

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sin x.$$

$$\text{Ta có: } x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]. \text{ Khi đó } y = \frac{2t-1}{t+2} = f(t).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{5}{(t+2)^2} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Ta có: } f(0) = -\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[0; \frac{\pi}{6}\right]} y = \max_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } x = \frac{\pi}{6}.$$

Bài 21. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 103 – Câu 40) Cho hàm số $f(x) = (a+3)x^4 - 2ax^2 + 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\min_{[0;3]} f(x)$ bằng?

Lời giải

$$f'(x) = 4(a+3)x^3 - 4ax$$

$$\text{Ta có: } \max_{[0;3]} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow a < -3 \text{ và } x = 2 \text{ là điểm cực trị của hàm số}$$

$$\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow a = -4 \text{ (Nhận)}$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 16x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [0; 3] \\ x = 0 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{cases}$$

$$f(0)=1; f(2)=17; f(3)=-8.$$

$$\text{Suy ra: } \min_{[0;3]} f(x) = -8.$$

Bài 22. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + x + m|$ xét trên đoạn $[2; 4]$, m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m_0 ?

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + m$ trên $[2; 4]$, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Có } f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \quad (\forall x) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad (\forall x \in [2; 4]).$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + x + m \text{ đồng biến trên } [2; 4].$$

$$f(2) = m - 2; \quad f(4) = m + 20.$$

$$\text{Nên } \max_{[2;4]} f(x) = m + 20; \min_{[2;4]} f(x) = m - 2.$$

$$\text{Do đó } M = \max_{[2;4]} y = \max_{[2;4]} |f(x)| = \max \{|m - 2|; |m + 20|\}.$$

$$\text{Ta có } 2M \geq |m - 2| + |m + 20| \geq |m - 2 - m - 20| = 22, \forall m.$$

$$\Rightarrow M \geq 11, \forall m$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 2| = |m + 20| \\ (m - 2)(m + 20) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$$

$$\text{Vậy } M_{\min} = 11 \Leftrightarrow m = -9.$$

$$\text{Do đó ta có } m_0 = -9.$$

Bài 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng?

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = x^3 - 28x + 48; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	2
g'		+
g	$g(0)$	$g(2)$

Dựa vào BBT, để $\max_{[0;2]} |g(x)| \leq 30 \Rightarrow \begin{cases} g(0) \geq -30 \\ g(2) \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-30 \geq -30 \\ m+14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16.$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; \dots; 15; 16\} \longrightarrow$ tổng các phần tử của S là 136.

Bài 24. Tìm m để hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2} + m$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2} + m$ là $D = [-2; 2]$.

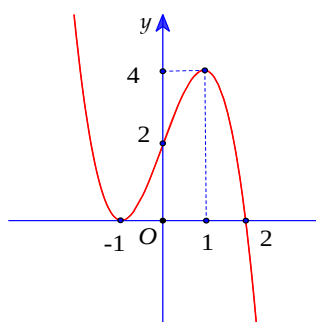
Ta có $y' = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}};$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$

Tính được $y(\sqrt{2}) = m + 2\sqrt{2}$, $y(-2) = m - 2$ và $y(2) = m + 2$.

Đề ý rằng $m - 2 < m + 2 < m + 2\sqrt{2}$ nên $\max_{[-2;2]} y = m + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}.$

Bài 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$		$f(2)$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{[-1;2]} f(x) = 6$ và $\min_{[-1;2]} f(x) = \frac{13}{4}$

Đặt $t = f(x)$, $t \in \left[\frac{13}{4}; 6\right]$.

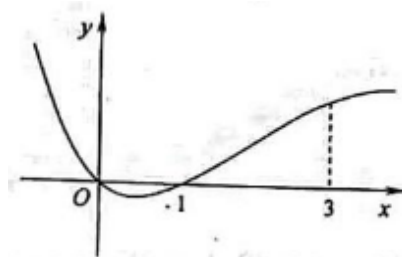
Ta có : $g(x) = t^3 - 3t = h(t)$, $t \in \left[\frac{13}{4}; 6\right]$.

$h'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases} \quad h(1) = -2 ; h(6) = 198 ; h\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{1573}{64}.$

Suy ra : $\max_{[-1;2]} g(x) = 198$ và $\min_{[-1;2]} g(x) = -2$.

Vậy $\max_{[-1;2]} g(x) + \min_{[-1;2]} g(x) = \frac{1445}{64}.$

Bài 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết $f(0) + f(2) = f(1) + f(3)$. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0; 3]$ là?

Lời giải

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$

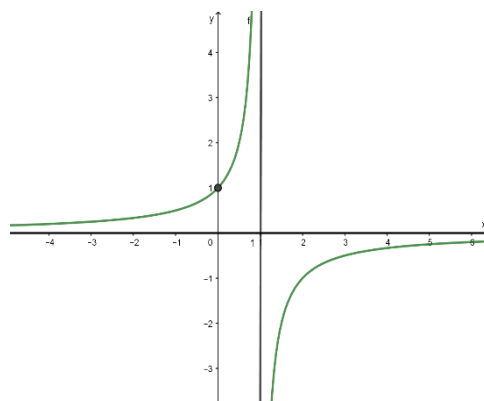
x	0	-1	1	2	3
$f'(x)$	0	-	0	+	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

Suy ra $\max_{[0;3]} f(x) = \max\{f(0); f(3)\}.$

Mặt khác $f(0) + f(2) = f(1) + f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(3) = f(1) - f(2) < 0 \Leftrightarrow f(0) < f(3)$

Vậy $\max_{[0;3]} f(x) = f(3).$

Bài 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x) = f(f(x))$.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$.

Lời giải

- Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$\begin{cases} ad - bc > 0 \\ -c = d \\ b = d \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c = d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(f(x)) = \frac{-1}{f(x)-1} = \frac{-1}{\frac{-1}{x-1}-1} = \frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in [-3; -1] \Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên đoạn } [-3; -1]$$

$$\Rightarrow \max_{[-3; -1]} g(x) = g(-1) = 2.$$

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 6,7,8, 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì, toán vd vdc và toán thực tế có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác.

Mua đúng tài liệu, chuyển khoản đúng tên tác giả: Trần Đình Cư

Tham gia nhóm Tài liệu Toán THCS của Thầy Trần Đình Cư:

<https://www.facebook.com/groups/648908762117217>

Tham gia nhóm Tài liệu Toán THPT của Thầy Trần Đình Cư:

<https://www.facebook.com/groups/dinhcuvip0603>

Tham gia nhóm zalo tài liệu Thầy Trần Đình Cư (Dành cho GV):

<https://zalo.me/g/yqbawz822>

Thông tin WEB các tài liệu chính chủ của Tác giả, thầy giáo Trần Đình Cư: toanthaycu.com

DẠNG TOÁN 3. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG

Bài toán: Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

Phương pháp:

Bước 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

Bước 2. Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).

Lưu ý: Trong một số trường hợp, có thể giải nhanh bằng bất đẳng thức:

① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM):

• $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, ta luôn có: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

• $\forall a \geq 0; b \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

• $\forall a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c$.

Một số kỹ năng cơ bản về ghép Cauchy:

• $mX + \frac{n}{X} \geq 2\sqrt{mX \cdot \frac{n}{X}} = 2\sqrt{mn}$, $\forall X > 0$ (khi $x \geq a$, cần dự đoán tại điểm biên $x = a$).

• $mX + \frac{n}{X^2} = \frac{mX}{2} + \frac{mX}{2} + \frac{n}{X^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{m^2 \cdot n}{4}}$.

• $mX^2 + \frac{n}{X} = mX^2 + \frac{n}{2X} + \frac{n}{2X} \geq 3\sqrt[3]{\frac{mn^2}{4}}$.

(Kỹ thuật tách cặp nghịch đảo là kỹ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy, biến số triệt tiêu, chỉ còn lại hằng số, dựa vào điểm rơi của bài toán).

• $X \cdot (a - mX) = \frac{1}{m} \cdot (mX) \cdot (a - mX) \leq \frac{1}{m} \cdot \frac{(mX + a - mX)^2}{4} = \frac{a^2}{4m}$.

• $X^2 \cdot (a - X) = 4 \cdot \frac{X}{2} \cdot \frac{X}{2} \cdot (a - X) \leq 4 \cdot \frac{\left(\frac{X}{2} + \frac{X}{2} + a - X\right)^3}{27} = \frac{4a^3}{27}$.

② Bất đẳng thức Cauchy Schwarz

• $\forall a, b, x, y$, ta có: $-\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \leq ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

• $\forall a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$, ta có: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Đề tham khảo BGD 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cauchy)

$$y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9} \quad (\text{do } x > 0)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x		0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$	
y'			-	0	+
y					

$\Rightarrow \min_{(0; +\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}.$

Ví dụ 2. (Chu Văn An - Hà Nội - Giữa HK1 - 2019) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$?

Lời giải

Ta có $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Vẽ bảng biến thiên ta tính được : $\min_{[-4; -2)} y = 7.$

Ví dụ 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 3]$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Hàm số xác định và liên tục trên nửa khoảng $(0; 3]$.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0; 3] \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $(0; 3]$.

Khi đó $\max_{(0;3]} y = y(3) = \frac{8}{3}$.

Ví dụ 4. (Trần Hưng Đạo - Vĩnh Phúc - Lần 1 - 2019) Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng?

Lời giải

TXĐ $D = (0; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT

x	0	1	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là $\sqrt{2}$.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 6,7,8, 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì, toán vd vdc và toán thực tế có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác.

Mua đúng tài liệu, chuyển khoản đúng tên tác giả: Trần Đình Cư

Tham gia nhóm Tài liệu Toán THCS của Thầy Trần Đình Cư:

<https://www.facebook.com/groups/648908762117217>

Tham gia nhóm Tài liệu Toán THPT của Thầy Trần Đình Cư:

<https://www.facebook.com/groups/dinhcuvip0603>

[Tham gia nhóm zalo tài liệu Thầy Trần Đình Cư \(Dành cho GV\):](https://zalo.me/g/yqbawz822)

<https://zalo.me/g/yqbawz822>

Thông tin WEB các tài liệu chính chủ của Tác giả, thầy giáo Trần Đình Cư: toanthaycu.com

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (THPT Trần Phú - Hồ Chí Minh - Năm 2021 - 2022) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ bằng?

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, có $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}} = x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 2. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 02 - Năm 2021 - 2022) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ bằng?}$$

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	$-\sqrt{2}$	1

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $-\sqrt{2}$ tại $x = -1$.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $y = x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}} = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ là 8.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên D ?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x-2) - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \frac{x(x-2) - (x^2-1)}{(x-2)^2 \sqrt{x^2-1}} = \frac{1-2x}{(x-2)^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		$\frac{1}{2}$	2		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	$ $
$f(x)$	$-\infty$				0					$-\sqrt{5}$

Vậy $\max_D f(x) = 0$; $\min f(x) = -\sqrt{5}$.

Bài 5. (Sở GD Hà Nội - Lần 1 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau

x	-5	1	7
y'	$-$	0	$+$
y	6	2	9

Diagram showing the variation of $f(x)$ with arrows indicating the direction of change between critical points and boundaries.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên nửa khoảng $[-5; 7)$?

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 9$ suy ra hàm số không có GTLN trên $[-5; 7)$.

Vậy $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN TỐI ƯU, CÓ YẾU TỐ THỰC TẾ

Phương pháp

Đưa yêu cầu bài toán về mối quan hệ hàm số, lập bảng biến thiên để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số với điều kiện ràng buộc cho trước.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Báo TH&TT - Số 4 -2019) Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Ta có $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$, $t \in (0; 24)$.

$$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}, c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(TM) \\ t = -1(KTM) \end{cases}.$$

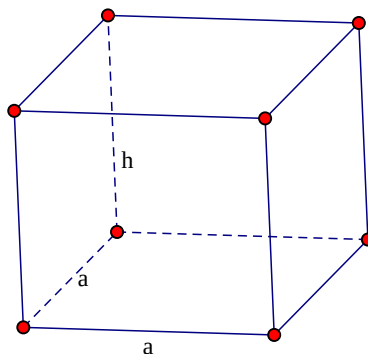
Bảng biến thiên:

t	0	1	24
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{24}{577}$

Từ bảng biến thiên ta thấy 1 giờ sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Ví dụ 2. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - Lần 1 - 2019) Một công ty sữa cần sản xuất các hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, chứa được thể tích thực là $180ml$. Chiều cao của hình hộp bằng bao nhiêu để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất?

Lời giải



Gọi cạnh của hình vuông là a và chiều cao hộp sữa là h .

Theo bài ra $a^2 \cdot h = 180 \Leftrightarrow h = \frac{180}{a^2}$

Diện tích toàn phần của hộp sữa là

$$S = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 4a \cdot \frac{180}{a^2} = 2a^2 + \frac{360}{a} + \frac{360}{a} \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot 360^2}$$

Suy ra diện tích toàn phần nhỏ nhất bằng $3\sqrt[3]{2 \cdot 360^2}$

khi $2a^2 = \frac{360}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{180} \Rightarrow h = \frac{180}{(\sqrt[3]{180})^2} = \sqrt[3]{180}.$

Ví dụ 3. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hoà Bình) Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(t) = -3t^2 + 90t = -3(t-15)^2 + 675 \leq 675.$$

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là 675 (người/ngày) vào ngày thứ 15.

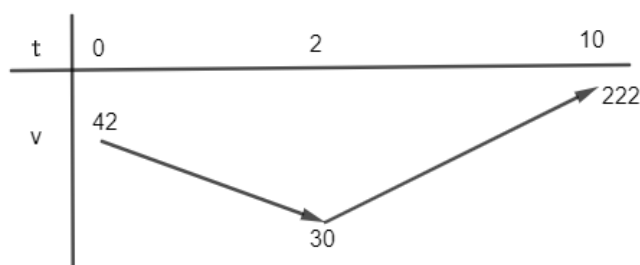
2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (THPT Nguyễn Huệ - BRVT) Một vật chuyển động theo quy luật $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1 \Rightarrow v = s' = 3t^2 - 12t + 42$$

Theo đề, ta cần tìm GTNN của v , với $t \in [0; 10]$



Dựa vào BBT, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được là $30(m/s)$.

Bài 2. (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - Năm 2021 - 2022) Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng:

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = S'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t.$$

$$v'(t) = -3t + 18$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6 \in [0; 10]$$

$$\text{Mặt khác } v(0) = 0.$$

$$v(6) = 54.$$

$$v(10) = 30.$$

$$\text{Do } \max_{t \in [0; 10]} v(t) = \max \{v(0); v(6); v(10)\} = \max \{0; 54; 30\} = 54(m/s).$$

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Vậy trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54(m/s)$.

Bài 3. Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S

Lời giải

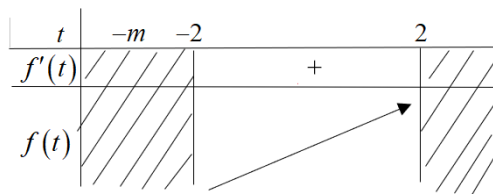
Đặt $t = x^3 - 3x$. Với $\forall x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [-2;2]$.

Ta được hàm số: $f(t) = (t + m)^2$, xét trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có: $f'(t) = 2(t + m)$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -m$.

+) Trường hợp 1: Nếu $-m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Ta có BBT:



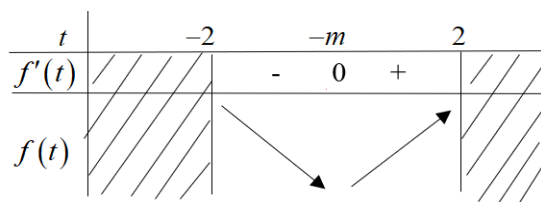
Từ BBT suy ra: $\min_{[-1;1]} y = \min_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$

Theo giả thiết: $\min_{[-1;1]} y = 4$

$$\Rightarrow (m-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (l) \\ m = 4 & (t/m) \end{cases}$$

+) Trường hợp 2: Nếu $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Ta có BBT:

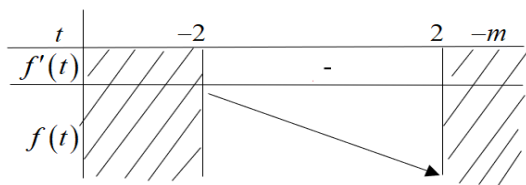


Từ BBT suy ra: $\min_{[-1;1]} y = \min_{[-2;2]} f(t) = f(-m) = 0$

Theo giả thiết: $\min_{[-1;1]} y = 4 \Rightarrow$ không có m thỏa mãn.

+) Trường hợp 3: Nếu $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$

Ta có BBT:



Từ BBT suy ra: $\min_{[-1;1]} y = \min_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$

Theo giả thiết: $\min_{[-1;1]} y = 4$

$$\Rightarrow (m+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (l) \\ m = -4 & (t/m) \end{cases}$$

Vậy $S = \{-4; 4\}$. Tổng các phần tử của S bằng 0.

Bài 4. Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Để bán được số tivi đó, cửa hàng đặt hàng từ Nhà máy sản xuất thành nhiều lần trong năm, số tivi đặt cho nhà máy là như nhau cho các lần đặt hàng. Mỗi lần lấy hàng từ nhà máy về cửa hàng chỉ để trưng bày được một nửa, một nửa số hàng còn lại phải lưu kho. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng đặt bao nhiêu lần trong một năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí mà cửa hàng phải trả là nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi x là số tivi mà cửa hàng đặt mỗi lần ($x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 2500$).

Số tivi trung bình lưu kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho là $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$ \$.

Số lần đặt hàng trong năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là: $\frac{2500}{x}(20 + 9x)$ \$.

Tổng số chi phí mà cửa hàng phải trả là: $\frac{2500}{x}(20 + 9x) + 5x = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $5x + \frac{50000}{x} \geq 1000$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 100$. Vậy cửa hàng cần đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái.

DẠNG 5. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Chuyên Hà Nội – AMSTERDAM-2019) Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + 3x^2 + 3y^2 - 3x - 5$ là?

Lời giải

Ta có: $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$. Do x, y không âm nên $x \in [0; 2]$.

Với $y = 2 - x$ thì $P = x^3 + 3x^2 + 3y^2 - 3x - 5 = x^3 + 3x^2 + 3(2 - x)^2 - 3x - 5$

$$= x^3 + 6x^2 - 15x + 7.$$

Xét $P = x^3 + 6x^2 - 15x + 7$ với $x \in [0; 2]$

$$\text{Ta có: } P' = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 2) \\ x = -5 \notin (0; 2) \end{cases}.$$

$$P(0) = 7, P(1) = -1, P(2) = 9.$$

$$\Rightarrow P_{\min} = -1.$$

Ví dụ 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính $M + m$?

Lời giải

$$\text{Từ } x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2} \text{ suy ra } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 0 \quad (1).$$

Mặt khác

$$2(x+y) = 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2y+2} \leq \frac{2(1+x-1)}{2} + \frac{2y+2+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y) \leq x+y+3 \Leftrightarrow x+y \leq 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $0 \leq x+y \leq 3$.

$$\text{Ta có } P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-x-y}.$$

Đặt $t = x+y$, $t \in [0; 3]$.

$$\text{Ta có } P = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}, P' = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}}, P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \pm 2\sqrt{2} \notin (0; 3) \end{cases}.$$

t	0	3
P'		+
P	18	25

Vậy $M + m = 43$.

Ví dụ 3. (Vĩnh Yên - Vĩnh Phúc) Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$.

Lời giải

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Theo giả thiết x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x, 0 < x < 2$. Thay $y = 2 - x$ vào P ta được $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2 - x)^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ với $0 < x < 2$, ta có

$$f'(x) = x^2 + 4x - 5; \text{ giải phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 2) \\ x = -5 \notin (0; 2) \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	1	2	
y'		-	0	+
y	5	$\frac{7}{3}$	$\frac{17}{3}$	

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{(0;2)} f(x) = f(1) = \frac{7}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{7}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - KSGV - 2019) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx). \text{ Giá trị lớn nhất của biểu thức } T = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } y^2 + z^2 \geq \frac{(y + z)^2}{2} \text{ và } yz \leq \frac{(y + z)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Và theo giả thiết } 5(x^2 + y^2 + z^2) &= 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5x^2 + 5(y + z)^2 - 9x(y + z) = 28yz \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 5(y + z)^2 - 9x(y + z) \leq 7(y + z)^2 \Leftrightarrow (5x + y + z)(x - 2y - 2z) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2(y + z). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3} \leq \frac{4(y + z)}{(y + z)^2} - \frac{1}{27(y + z)^3} = \frac{4}{y + z} - \frac{1}{27(y + z)^3}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} \text{ với } t > 0, \text{ có } f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4} = \frac{1 - 36t^2}{9t^4}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	16	0

Dựa vào BBT suy ra giá trị lớn nhất của $T=16$ đạt được tại $\begin{cases} x=2(y+z) \\ y=z \\ y+z=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=z=\frac{1}{12} \end{cases}$.

Bài 2. Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x+y=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$?

Lời giải

Do $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y=1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} 0 \leq x, y \leq 1 \\ y=1-x \end{cases}$.

Thay $y=1-x$ vào biểu thức S ta được:

$$S=(4x^2+3(1-x))(4(1-x)^2+3x)+25x(1-x)$$

$$=(4x^2-3x+3)(4x^2-5x+4)+25x-25x^2$$

$$=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$$

Đặt $S=S(x)=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$ với $0 \leq x \leq 1$.

Ta có $S'(x)=64x^3-96x^2+36x-2$.

Xét phương trình

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow 64x^3-96x^2+36x-2=0 \Leftrightarrow (2x-1)(32x^2-32x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \in (0;1) \\ x=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \in (0;1) \\ x=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \in (0;1) \end{cases}$$

Ta có $S(0)=12; S(1)=12; S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{2}; S\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{191}{16}; S\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{191}{16}$.

$$\text{Do đó } \max_{[0;1]} S(x) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2} \text{ và } \min_{[0;1]} S(x) = S\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) = S\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{25}{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } m = \frac{191}{16} \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Bài 3. (SGD Vĩnh Phúc - Lần 01 - Năm 2021 - 2022) Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 5(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 4(x^2 + y^2) + 2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có, $(x+y)^2 \geq 4xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$, kết hợp với giả thiết $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$ suy ra

$$(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Rightarrow x+y \geq 1.$$

$$\begin{aligned} A &= 5(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 4(x^2 + y^2) + 2 \\ &= \frac{5}{2}[(x^2 + y^2)^2 + x^4 + y^4] - 4(x^2 + y^2) + 2 \\ &\geq \frac{5}{2}\left[(x^2 + y^2)^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}\right] - 4(x^2 + y^2) + 2 \\ &= \frac{15}{4}(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó, } A \geq \frac{15}{4}t^2 - 4t + 2$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = \frac{15}{4}t^2 - 4t + 2$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ như sau

t	$-\infty$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(t)$			$\frac{15}{16}$	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta có $\min_{t \in [\frac{1}{2}; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}$.

Tức là, $A \geq \frac{15}{16}$, dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{15}{16}$.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 6,7,8, 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì, toán vd vdc và toán thực tế có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác.

Mua đúng tài liệu, chuyển khoản đúng tên tác giả: Trần Đình Cư

Tham gia nhóm Tài liệu Toán THCS của Thầy Trần Đình Cư:

<https://www.facebook.com/groups/648908762117217>

Tham gia nhóm Tài liệu Toán THPT của Thầy Trần Đình Cư:

<https://www.facebook.com/groups/dinhcuvip0603>

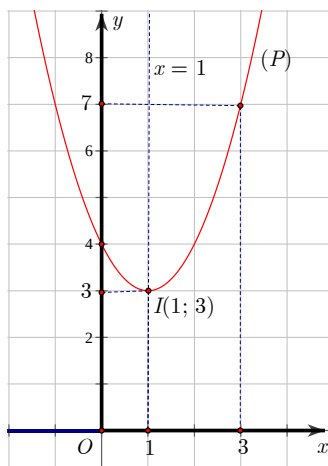
Tham gia nhóm zalo tài liệu Thầy Trần Đình Cư (Dành cho GV):

<https://zalo.me/g/yqbawz822>

Thông tin WEB các tài liệu chính chủ của Tác giả, thầy giáo Trần Đình Cư: toanthaycu.com

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho đồ thị hàm số y , tìm GTNN của hàm số trên $[0; 3]$.



A. 4.

B. 3.

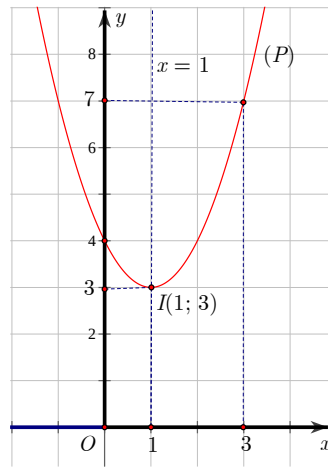
C. 2.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho đồ thị hàm số y , tìm GTLN của hàm số trên $[0; 3]$.



A. 4.

B. 6.

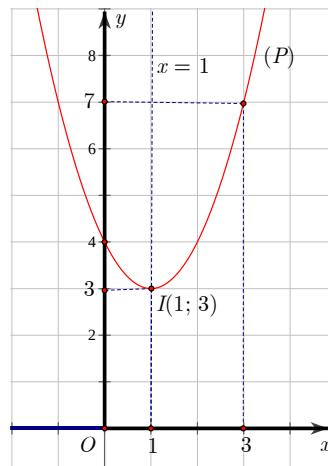
C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho đồ thị hàm số y , tìm GTLN của hàm số trên $[0;1]$.



A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Cho bảng biến thiên của hàm số y , tìm GTNN của hàm số trên $[0;9]$.

t	0	$\frac{7}{2}$	9
y	3	$-\frac{37}{4}$	21

A. 3.

B. $\frac{7}{2}$.

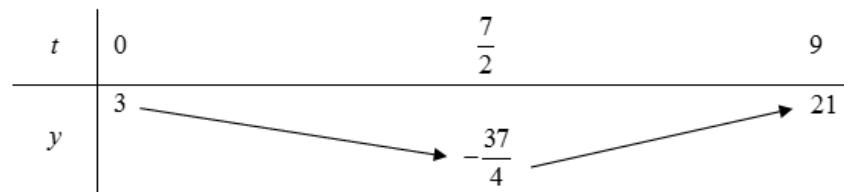
C. $-\frac{37}{4}$.

D. 21.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số y , tìm GTLN của hàm số trên $[0;9]$.



- A. 3. B. $\frac{7}{2}$. C. $-\frac{37}{4}$. D. 21.

Lời giải

Chọn D

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0; f(2) = -2; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{9}{4}$ khi $x = \frac{3}{2}$

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0; f(2) = -2; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 0 khi $x = 0$

Câu 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 3$ trên đoạn $[0; 9]$.

- A. 3. B. $-\frac{37}{4}$. C. 21. D. $\frac{-37}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 2x - 7$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$f(0) = 3; f(9) = 21; f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{-37}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{-37}{4}$ khi $x = \frac{7}{4}$

Câu 9: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 3$ trên đoạn $[0; 9]$.

- A. 3. B. $-\frac{37}{4}$. C. 21. D. $\frac{-37}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 2x - 7$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$f(0) = 3; f(9) = 21; f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{-37}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 21 khi $x = 9$

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = -x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

- A. 3. B. $-\frac{37}{4}$. C. 21. D. $\frac{-37}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = -2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (loại vì } x \notin [0; 4].)$$

$$f(0) = 3; f(4) = -29$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3 khi $x = 0$

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(30 - 2x)(80 - 2x)$ trên đoạn $[5; 10]$

- A. $\frac{200000}{27}$. B. $\frac{20000}{27}$. C. 6000. D. 7000.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 440x + 2400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{3} (n) \\ x = 30 (l) \end{cases}$$

$$f(5) = 7000; f(10) = 6000; f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200000}{27}$$

Vậy giá trị lớn nhất là $\frac{200000}{27}$ khi $x = \frac{20}{3}$

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 9$ trên đoạn $[-1; 3]$

A. 2.

B. 9.

C. 18.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2; f(0) = 9; f(2) = -7; f(3) = 18$$

Vậy giá trị lớn nhất là 18 khi $x = 3$

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(n) = -20n^2 + 480n$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

A. 2870.

B. 2880.

C. 2800.

D. 2000.

Lời giải

Chọn B

$$f'(n) = -40n + 480 = 0 \Leftrightarrow n = 12.$$

Lập bảng biến thiên:

n	0	12	$+\infty$
$f'(n)$		+	0
$f(n)$	0	2880	$-\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2880 khi $n = 12$

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{40}x^2(30 - x)$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

A. 20.

B. 24.

C. 25.

D. 30.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = -\frac{1}{40}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 20(n) \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

x	0	20	$+\infty$
y'		0	-
y		25	

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 25 khi $x = 20$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$

A. 1.

B. -17.

C. 3.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$

x	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-17	3	-1	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; +\infty)$ là -17 khi $x = -1$

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	0	1		$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$	3		$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất là 3 khi $x=1$.

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$ trên khoảng $(0; 10\sqrt{5})$

A. 310.

B. 250.

C. 320.

D. 300.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2000 = 0 \Rightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên

x	0	10	$10\sqrt{5}$
$f(x)$		300	589

Vậy giá trị nhỏ nhất là 300 khi $x=10$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

A. 130.

B. 160.

C. 120.

D. 150.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Bảng biến thiên.

x	0	5	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		150	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất là 150 khi $x=5$.

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x^3}{x-4}$ trên khoảng $(0; 8)$

A. 102.

B. 108.

C. 120.

D. 110.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = \frac{x^3}{x-4}.$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-4) - x^3}{(x-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 12x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

Bảng biến thiên

x	0	6	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		108	

Vậy $y_{\min} = 108$ khi $x = 6$

Câu 20: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

A. 2.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$		$\frac{1}{2}$	

Vậy giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}$ khi $x = 1$.

Câu 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3000.(4-x) + 5000.\sqrt{x^2+1}$ trên đoạn $[0; 4]$

A. 16000.

B. 15000.

C. 12000.

D. 13000.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = -3000 + 5000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3000 + 5000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2 + 1} + 5000x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 1} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

$$f(0) = 17000, f\left(\frac{3}{4}\right) = 16000, f(4) = 20615,52813.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 16000 và tại $x = \frac{3}{4}$.

Câu 22: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{16 + (7-x)^2} + \frac{1}{10}x$ trên đoạn $[0; 7]$

A. $\frac{13}{5}$.

B. $\frac{14}{15}$.

C. $\frac{17}{15}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x-7}{\sqrt{16 + (7-x)^2}} + \frac{1}{10}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{16 + (7-x)^2} = 10(7-x) \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$f(0) = \frac{1}{6}\sqrt{65}, f(7) = \frac{41}{30}, f(4) = \frac{17}{15}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất là $\frac{17}{15}$ khi $x = 4$

Câu 23: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$ trên $\left(0; \frac{a}{2}\right)$, a là hằng số khác 0

A. $\frac{2a^2}{9}$.

B. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{a(a-3x)}{2(\sqrt{a^2 - 2ax})}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{a(a-3x)}{2(\sqrt{a^2 - 2ax})} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$		

Vậy giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $x = \frac{a}{3}$

Câu 24: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 360 - 10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lượng cá sau một vụ thu được nhiều nhất?



A. 17.

B. 20.

C. 15.

D. 18.

Lời giải

Chọn D

Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là :

$$T = (360 - 10n)n = 360n - 10n^2 = -10(n^2 - 36n + 324 - 324) = -10(n - 18)^2 + 3240 \leq 3240$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow n = 18$.

Vậy phải thả 18 con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lượng cá sau một vụ thu được nhiều nhất

Câu 25: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?



A. 80 USD.

B. 160 USD.

C. 40 USD.

D. 240 USD.

Lời giải

Chọn A

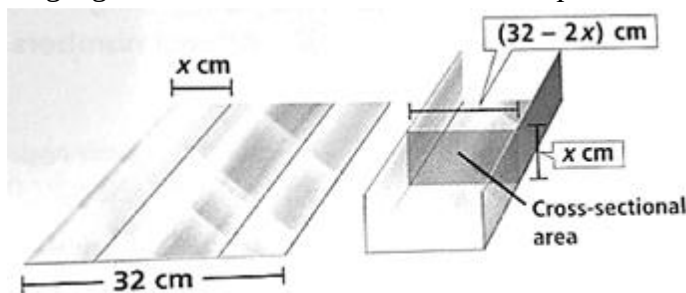
Gọi y (USD) là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

$$\text{Ta có } y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

Câu 26: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



A. 7 cm.

B. 8 cm.

C. 9 cm.

D. 10 cm.

Lời giải

Chọn B

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16).$$

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 27: Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$ thì diện tích của nó lớn nhất là:

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{25}{2}$.

C. 25.

D. $\frac{25}{8}$.

Lời giải

Chọn B

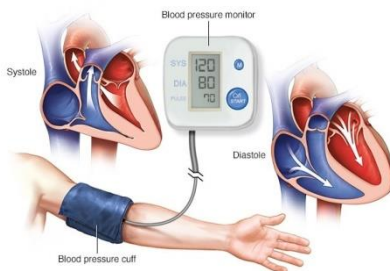
Gọi một cạnh góc vuông là x ($0 < x < 5\sqrt{2}$) nên cạnh còn lại $\sqrt{50 - x^2}$.

$$\text{Diện tích tam giác vuông là: } S = \frac{1}{2}x\sqrt{50 - x^2}.$$

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}x\sqrt{50 - x^2} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + 50 - x^2}{2} = \frac{25}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \sqrt{50 - x^2} \Leftrightarrow x = 5.$$

$$\text{Diện tích lớn nhất khi: } x = 5 \Rightarrow S = \frac{25}{2}.$$

Câu 28: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



A. $x = 8$.

B. $x = 10$.

C. $x = 15$.

D. $x = 7$.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$\text{Có } G'(x) = 0,035[2x(15 - x) - x^2] = 0,105x(10 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$G(0) = 0; G(10) = \frac{35}{2}; G(15) = 0.$$

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.

Câu 29: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức: $f(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ với $0 \leq t \leq 30$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

A. 10 phút.

B. 20 phút.

C. 30 phút.

D. 25 phút.

Lời giải

Chọn B

$$f(t) = -3t^2 + 60t$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 60t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}$$

$$f(0) = f(30) = 1000, f(20) = 5000$$

Vậy giá trị lớn nhất là 5000 khi $t = 20$ (phút)

Câu 30: Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (USD). Khẳng định nào sau đây đúng.



- A.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).
- B.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.
- C.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.
- D.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135 (USD).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Số tiền thu được là: } y = x \left(3 - \frac{x}{40} \right)^2 \Rightarrow y' = 9 - \frac{3}{10}x + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 120 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 60.$$

$$\Rightarrow y_{\max} = 160 \Leftrightarrow x = 40.$$

Câu 31: Sức chứa tối đa mỗi phòng học là 200 em HS. Nếu một phòng học có x HS thì học phí cho mỗi HS là $\left(9 - \frac{x}{40} \right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A.** Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất khi có 200 HS.
- B.** Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất bằng 4.320 (nghìn đồng).
- C.** Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất khi có 360 HS.
- D.** Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất bằng 3.200 (nghìn đồng).

Lời giải

Chọn B

Số tiền thu được khi có x HS là :

$$f(x) = x \left(9 - \frac{x}{40} \right)^2.$$

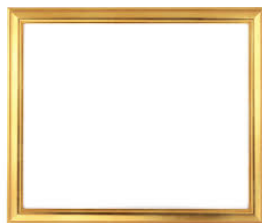
$$\text{Ta có } f'(x) = \left(9 - \frac{x}{40} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{40} \left(9 - \frac{x}{40} \right) x = \left(9 - \frac{x}{40} \right) \left(9 - \frac{x}{40} - \frac{x}{20} \right) = \left(9 - \frac{x}{40} \right) \left(9 - \frac{3x}{40} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(9 - \frac{x}{40}\right)\left(9 - \frac{3x}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 \\ x = 120 \end{cases}$$

$$f(120) = 4.320; f(200) = 3.200.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 200]} f(x) = f(120) = 4.320.$$

Câu 32: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất?



A. $8\sqrt{3} \text{ cm}$.

B. $4\sqrt{3} \text{ cm}$.

C. 24 cm .

D. $16\sqrt{3} \text{ cm}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b ; $0 < a, b \leq 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \frac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \frac{48}{a}\right)$

$$P'(a) = 2\left(1 - \frac{48}{a^2}\right); P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên:

a	0	$4\sqrt{3}$	48
$P'(a)$		– 0 +	
$P(a)$		$16\sqrt{3}$	

Vậy hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 33: Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi \text{ m}^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?



A. $R = \frac{1}{2} \text{ m}, h = 8 \text{ m}$. **B.** $R = 1 \text{ m}, h = 2 \text{ m}$. **C.** $R = 2 \text{ m}, h = \frac{1}{2} \text{ m}$. **D.** $R = 4 \text{ m}, h = \frac{1}{5} \text{ m}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \left(R^2 + \frac{2}{R} \right).$$

Xét hàm số $f(R) = R^2 + \frac{2}{R}$ với $R \in (0; +\infty)$. Ta có:

$$f'(R) = 2R - \frac{2}{R^2} = \frac{2(R^3 - 1)}{R^2}$$

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = 1$$

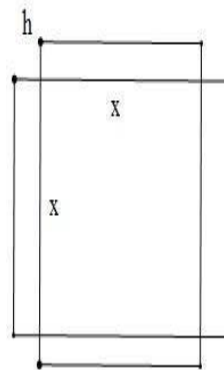
Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'	–	0	+
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R = 1 \Rightarrow h = 2$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R = 1\text{m}, h = 2\text{m}$.

Câu 34: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao $h(\text{cm})$ và có thể tích là $500(\text{cm}^3)$. Hãy tìm độ dài cạnh của hình vuông sao cho chiếc hộp được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.



A. 5 cm.

B. 10 cm.

C. 2 cm.

D. 3 cm.

Lời giải

Chọn B

Để tốn ít nhiên liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất.

$$V = x^2 \cdot h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}.$$

$$S = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x} \text{ với } x \in (0; 10\sqrt{5})$$

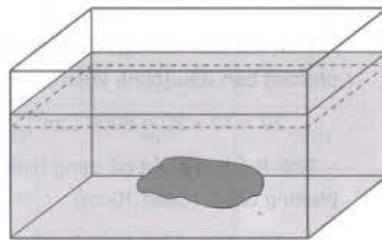
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	$10\sqrt{5}$
$f(x)$		300	589

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất 300 khi $x = 10$.

Câu 35: Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/ m^2 . Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công?



- A.** 13 triệu đồng. **B.** 17 triệu đồng. **C.** 15 triệu đồng. **D.** 11 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi $x (x > 0)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$$V = 2x^2 \cdot h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

$$\text{Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là } S = 6x \cdot h + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2 \quad (x > 0)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{500}{x} + 2x^2 \text{ với } x \in (0; +\infty)$$

$$f'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 5$

Vậy chi phí thuê nhân công là: $150.100000 = 15000000$ (đồng)

Câu 36: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.



- A. 39.000 đồng. B. 42.000 đồng. C. 43.000 đồng. D. 40.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 37: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?



- A. 4 giờ. B. 1 giờ. C. 3 giờ. D. 2 giờ.

Lời giải

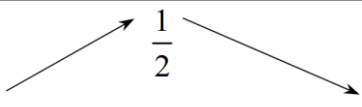
Chọn B

Ta có: $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ với $t \in (0; +\infty)$

$$c'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}.$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$			

Vậy $\max_{(0; +\infty)} c(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 1$.

Câu 38: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng, trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là



A. 15 ngày.

B. 4 ngày.

C. 10 ngày.

D. 20 ngày.

Lời giải

Chọn D

Gọi x (lít) ($0 < x < 10$) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10 - x}$, $x \in (0; 10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10 - x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10 - x)^2}.$$

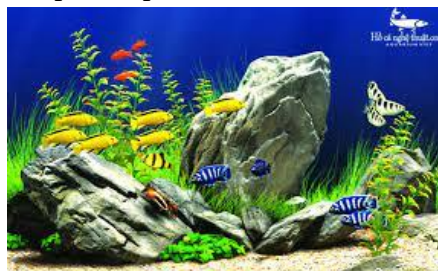
$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10 - x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0; 10) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	4	10	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		20	$+\infty$

Theo bảng biến thiên ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Câu 39: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60cm , thể tích 96000cm^3 . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m^2 . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.



- A.** 83200 VNĐ. **B.** 320000 VNĐ. **C.** 832000 VNĐ. **D.** 32000 VNĐ.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x, y(m)$ ($x > 0, y > 0$) là chiều dài và chiều rộng của đáy bể, khi đó theo đề ta suy ra

$0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \frac{0,16}{x}$. Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) \cdot 70000 + 100000x \frac{0,16}{x} \Leftrightarrow f(x) = 84000 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) + 16000 \text{ (VNĐ)}.$$

$$f'(x) = 84000 \left(1 - \frac{0,16}{x^2} \right), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	0,4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200 \text{ VNĐ}$.

Câu 40: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.



- A.** 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng. **C.** 30,5 triệu đồng. **D.** 29,5 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu đồng) là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \leq x \leq 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$

Ta có: $f'(x) = -400x + 200$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -400x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 2400; f(4) = -1600; f\left(\frac{1}{2}\right) = 2450$$

$$\max_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 41: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.



- A.** 39000 đồng. **B.** 42000 đồng. **C.** 42000 đồng. **D.** 40000 đồng.

Lời giải

Chọn C

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Xét hàm số $f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$ trên đoạn $[30000; 50000]$

Ta có: $f'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42000$$

$$f(30000) = ; f(50000) = ; f(42000) = 1440000$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = 1440000 \text{ khi } x = 42000$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 42: Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy A4 trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?



A. 6 máy.

B. 5 máy.

C. 4 máy.

D. 7 máy.

Lời giải

Chọn B

Gọi số giờ cần in là x thì n máy in được $4000.n.x$ bản in trong x giờ.

$$\text{Ta có } 4000.n.x = 50000 \Rightarrow nx = \frac{25}{2}$$

Chi phí của n máy chạy trong x giờ là $20x(3n+5)$ nghìn đồng.

Chi phí để bảo trì n máy là $50n$ nghìn đồng.

$$\text{Tổng chi phí là } f(n) = 20x(3n+5) + 50n = 60nx + 100x + 50n = 750 + \frac{1250}{n} + 50n$$

$$f'(n) = -\frac{1250}{n^2} + 50, \quad f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 5.$$

Bảng biến thiên

n	1	5	8
$f'(n)$	-	0	+
$f(n)$		$f(5)$	

Để thu được tiền lãi cao nhất cần chi phí thấp nhất, vậy $n = 5$

- Câu 43:** Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là 6km/h . Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\text{ km/h}$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng:
- A.** 12 km/h . **B.** 8 km/h . **C.** 10 km/h . **D.** 9 km/h .

Lời giải

Chọn D

Thời gian cá bơi: $t = \frac{300}{v-6} \Rightarrow E = cv^3t = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6}.$

Xét hàm số $E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6}$ với $v \in (6; +\infty).$

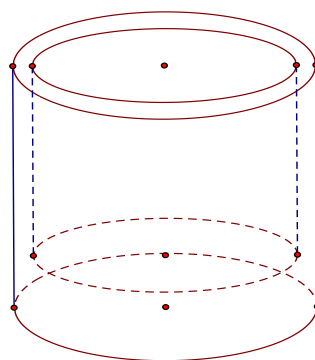
$$E'(v) = \frac{-300 \cdot c \cdot v^3}{(v-6)^2} + \frac{900cv^2}{v-6} = 0 \Rightarrow v = 9.$$

Dựa vào bảng biến thiên:

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$		- 0	+
$E(v)$			

$$\Rightarrow E_{\min} \Leftrightarrow v = 9.$$

- Câu 44:** Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5\text{ cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,2\text{ cm}$ và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi\text{ cm}^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?



A. $70,16\pi \text{ cm}^3$.

B. $80,16\pi \text{ cm}^3$.

C. $85,66\pi \text{ cm}^3$.

D. $75,66\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là r, h ta có: $y \Rightarrow h = \frac{480}{r^2}$.

Thể tích hình trụ bên ngoài là: $V = \pi(r+2)^2 \cdot (h+1,5) = \pi(r+2)^2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right)$.

Thể tích thủy tinh là: $\pi(r+2)^2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right) - 480\pi$.

Xét $f(r) = \pi(r+2)^2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right), r > 0$.

$\Rightarrow f'(r) = 2\pi(r+2) \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right) + \pi(r+2)^2 \cdot \left(-\frac{960}{r^3}\right)$

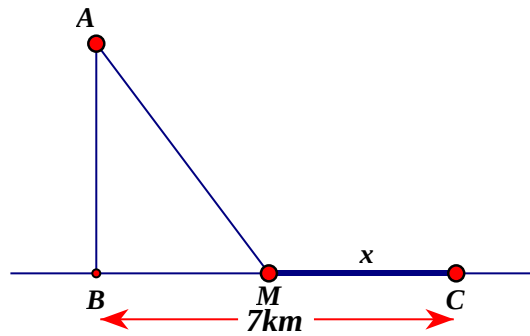
$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right) = (r+2) \cdot \frac{960}{r^3} \Leftrightarrow 3 = \frac{192}{r^3} \Leftrightarrow r = 4$.

Bảng biến thiên

r	0	4	$+\infty$
$f'(r)$	-	0	+
$f(r)$	$+\infty$	$\frac{27783}{50}\pi$	$+\infty$

Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\frac{27783}{50}\pi - 480\pi \approx 75,66\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 45: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 4(\text{km})$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7(\text{km})$. Người canh hải đăng phải chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $6(\text{km/h})$ rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc $10(\text{km/h})$ (hình vẽ bên). Xác định khoảng cách từ M đến C để người đó đi từ A đến C là nhanh nhất.



A. 9km.

B. 6km.

C. 3km.

D. 4km.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Quãng đường } AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{16 + (7-x)^2}$$

$$\text{Thời gian đi quãng đường } AM \text{ là } \frac{\sqrt{16 + (7-x)^2}}{6} \text{ (giờ)}.$$

$$\text{Quãng đường } MC = x \Rightarrow \text{thời gian đi quãng đường } MC \text{ là } \frac{x}{10} \text{ (giờ)}.$$

$$\text{Tổng thời gian đi từ } A \text{ đến } C \text{ là } y = \frac{1}{6}\sqrt{16 + (7-x)^2} + \frac{1}{10}x \text{ (với } 0 \leq x \leq 7).$$

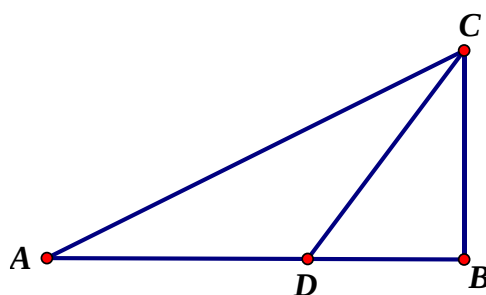
$$y' = \frac{1}{6} \cdot \frac{x-7}{\sqrt{16 + (7-x)^2}} + \frac{1}{10}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{16 + (7-x)^2} = 10(7-x) \Leftrightarrow x = 4.$$

$$y(0) = \frac{1}{6}\sqrt{65}, y(7) = \frac{41}{30}, y(4) = \frac{17}{15}.$$

$$\text{Vậy GTNN là } y(4) = \frac{17}{15}, \text{ tức là khoảng cách } x = 4 \text{ (km)}.$$

Câu 46: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$ km, $BC = 10$ km)



A. $\frac{15}{2}$ km.

B. 10 km.

C. $\frac{65}{2}$ km.

D. 40 km.

Lời giải

Chọn C

Đặt $AD = x$ km, $x \in [0; 40] \Rightarrow BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2}$.

Tổng kinh phí đi từ A đến C là $f(x) = x \cdot 3 + \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \cdot 5$.

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}.$$

$$f'(x) = 3 + 5 \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{65}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{65}{2}$	40
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Câu 47: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ 5km, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng 7km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc 6km/h. Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.

A. $2\sqrt{5}$ km.

B. $\frac{7}{3}$ km.

C. $\frac{7}{2}$ km.

D. $3\sqrt{2}$ km.

Lời giải

Chọn A

Gọi $BM = x$ (km), $0 \leq x \leq 7$. Khi đó: $AM = \sqrt{25 + x^2}$ và $MC = 7 - x$.

Theo đề bài ta có: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7 - x}{6}$.

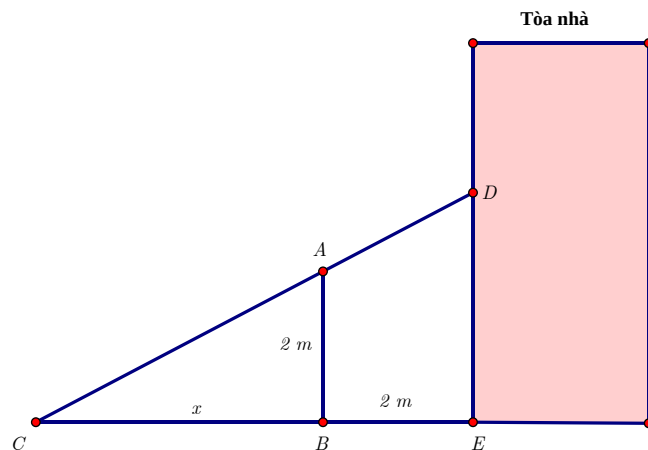
$$f'(x) = \frac{3x - 2\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}.$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Khi đó: } f(0) = \frac{29}{12}, f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4} \text{ và } f(2\sqrt{5}) = \frac{14-\sqrt{5}}{12}.$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in [0;7]} f(x) = f(2\sqrt{5}) = \frac{14-\sqrt{5}}{12}.$$

Câu 48: Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?



A. $4\sqrt{2}m$.

B. $6m$.

C. $3\sqrt{5}m$.

D. $4\sqrt{2}cm$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $BC = x (x > 0)$. Ta cần tìm x để độ dài CD đạt GTNN.

$$\text{Ta có } \frac{BC}{CE} = \frac{x}{x+2} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow CD = AC \frac{x+2}{x} = \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{x+2}{x}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}(x+2)}{x}.$$

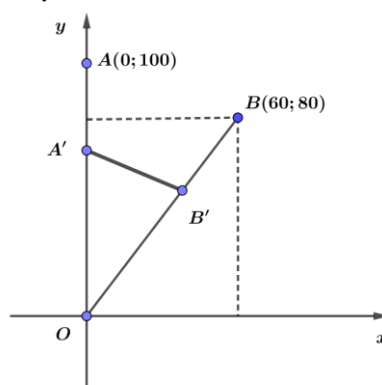
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{8}{x^2\sqrt{x^2+4}}. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	0	2	3	
$f'(x)$		–	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$4\sqrt{2}$	$+\infty$

Vậy GTNN là $4\sqrt{2}$, tức là khoảng cách $x = 2$ (m).

Câu 49: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s. Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s. Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



A. $10\sqrt{5}$ m.

B. $20\sqrt{5}$ m.

C. $20\sqrt{3}$ m.

D. $10\sqrt{3}$ m.

Lời giải

Chọn B

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là

$$k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Do đó tại thời điểm } t, \text{ nó có tọa độ là } \begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60-6t; 80-8t).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A'B'} = (60-6t; -20-3t).$$

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

Xét hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ trên đoạn $[0;10]$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 90t - 600$$

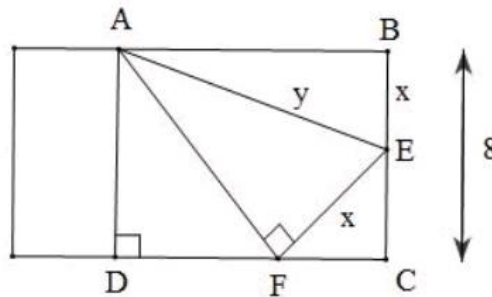
$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 90t - 600 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{3}$$

$$f(0) = 4000; f(10) = ; f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000$$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0;10]} f(t) = 2000 \text{ khi } x = \frac{20}{3}$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 50: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 cm và chiều rộng 8 cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. $6\sqrt{3}$ cm.

B. $6\sqrt{2}$ cm.

C. $6\sqrt{5}$ cm.

D. 6 cm.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } EF = x, EC = 8 - x \Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8 - x)^2} = \sqrt{16x - 64}.$$

$$\text{Ta có } \triangle ADF \sim \triangle FCE (g.g) \Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{CF}{AD}.$$

$$AF = \frac{EF \cdot AD}{FC} = \frac{8x}{\sqrt{16x - 64}}.$$

$$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\frac{64x^2}{16x - 64} + x^2} = \sqrt{\frac{16x^3}{16x - 64}}.$$

$$f(x) = \frac{16x^3}{16x - 64} \quad x \in (0; 8).$$

$$f'(x) = \frac{48x^2(16x - 64) - 16 \cdot 16x^3}{(16x - 64)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 768x^3 - 3072x^2 - 256x^3 = 0 \Leftrightarrow 512x^3 - 3072x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

Bảng biến thiên:

x	0	6	8
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		108	

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y_{\min} = \sqrt{f_{\min}} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

Học sinh đky khóa học

1. Zalo thầy Thuận Toán: 0869998668

zalo.me/84869998668

2. Facebook thầy:

<https://www.facebook.com/Thaygiaothuan.99/>

3. Fanpage thầy:

<https://www.facebook.com/thaythuandaytoan>

4. Tiktok thầy:

https://www.tiktok.com/@thay_hothucthuan