



**TÀI LIỆU THUỘC KHÓA HỌC
“LIVE VIP 9+ TOÁN ”**

**ĐĂNG KÝ HỌC EM INBOX THẦY TU
VẤN NHÉ!**

TOÁN THỰC TẾ LỚP 12 SGK MỚI **(Chuẩn cấu trúc SGK form mới)**

CHUYÊN ĐỀ 4 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

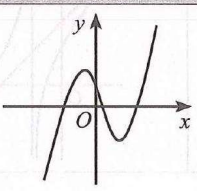
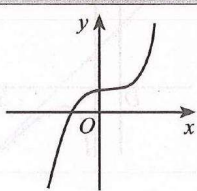
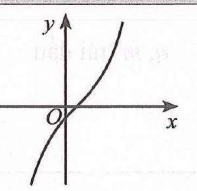
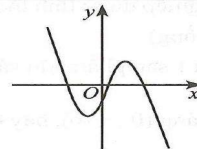
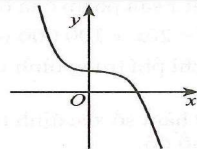
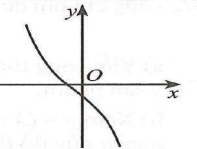
Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

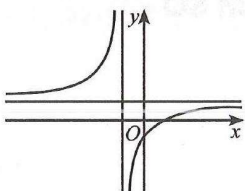
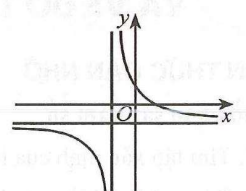
Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đơn giản),...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

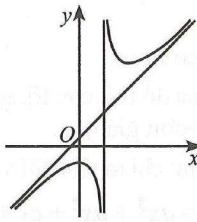
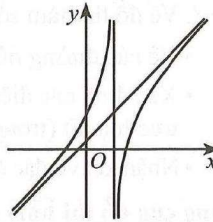
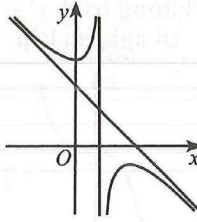
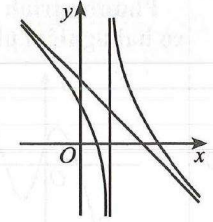
2. Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt	Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép	Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm
$a > 0$			
$a < 0$			

3. Dạng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

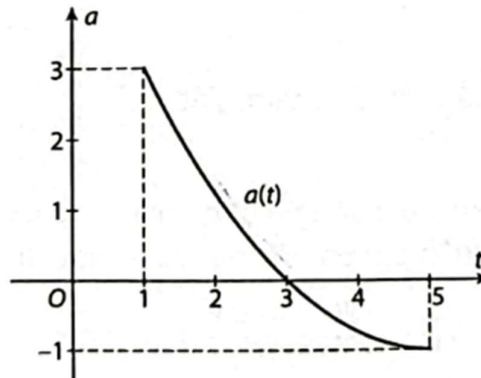
$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

4. Dạng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

	Hàm số có cực trị	Hàm số không có cực trị
a, m cùng dấu		
a, m trái dấu		

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Gia tốc $a(t)$ của một vật chuyển động, t tính theo giây, từ giây thứ nhất đến giây thứ 5 là một hàm liên tục có đồ thị như sau:



- Lập bảng biến thiên của hàm vận tốc $y = v(t)$ của vật, với $t \in [1; 5]$
- Tại thời điểm nào vật chuyển động với vận tốc lớn nhất?

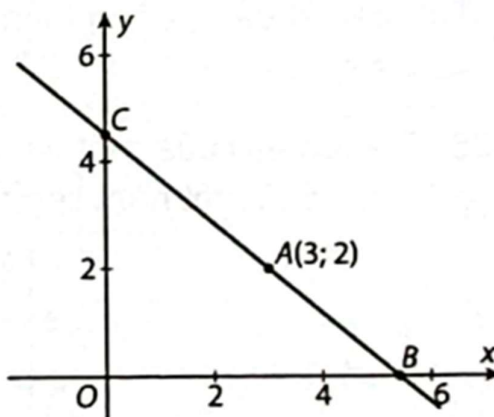
Câu 2: Một mẫu giấy in hình chữ nhật được thiết kế với vùng in có diện tích 300cm^2 , lề trái và lề phải là 2 cm, lề trên và lề dưới là 3 cm. Gọi $x(\text{cm})$ là chiều rộng của tờ giấy.

- Tính diện tích của tờ giấy theo x
- Kí hiệu diện tích tờ giấy là $S(x)$. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(x)$
- Tìm kích thước của tờ giấy sao cho nguyên liệu giấy được sử dụng là ít nhất.

Câu 3: Giả sử chi phí để sản xuất x sản phẩm của một nhà máy được cho bởi $C(x) = 0,2x^2 + 10x + 5$ (triệu đồng). Khi đó chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x}$

- Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$
- Số lượng sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để chi phí trung bình là thấp nhất?

Câu 4: Cho điểm $A(3;2)$ trên mặt phẳng tọa độ. Một đường thẳng đi qua A cắt trục hoành tại B, cắt trục tung tại C tạo thành một tam giác OBC nằm trong góc phần tư thứ nhất, với O là gốc tọa độ.



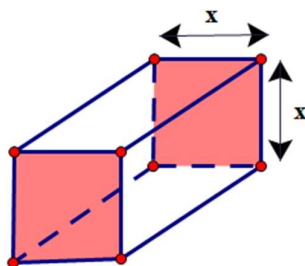
- Biết hoành độ điểm B là $x = t$ với $t > 3$. Tính diện tích tam giác OBC theo t . Kí hiệu diện tích này là $S(t)$.
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(t)$.
- Tìm vị trí điểm B để diện tích tam giác OBC là nhỏ nhất.

Câu 5: Một quần thể cá được nuôi trong một hồ nhân tạo lúc ban đầu có 80000 con. Sau t năm, số lượng quần thể cá nói trên được xác định bởi $N(t) = \frac{20(4+3t)}{1+0,05t}$ (nghìn con)

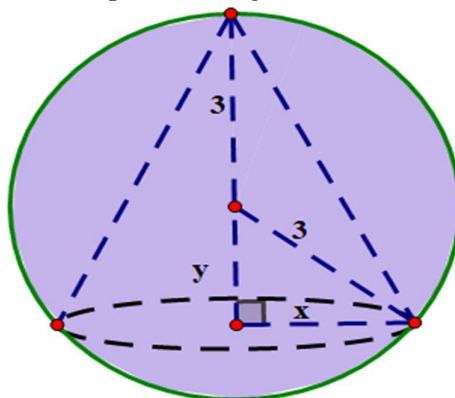
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = N(t)$.
- Số lượng tối đa có thể có của quần thể cá là bao nhiêu?

Câu 6: Một khối брун kiện hình hộp chữ nhật được quy định về kích cỡ như sau: tổng chiều dài và chu vi thiết diện ngang (hình vuông) là 240 cm. Gọi x là độ dài cạnh của thiết diện ngang.

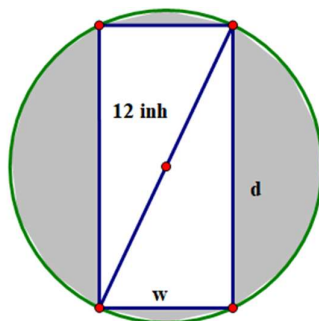
- Tính thể tích của khối брун kiện theo x .
- Kí hiệu $V(x)$ là thể tích của khối брун kiện. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = V(x)$.



Câu 7: Tìm thể tích lớn nhất của hình nón nội tiếp được trong hình cầu có bán kính bằng 3(xem hình vẽ)



Câu 8: Độ bền S của dầm gỗ hình chữ nhật tỉ lệ với tích của chiều rộng w và bình phương chiều sâu d của nó (xem hình vẽ). Tìm kích thước của dầm gỗ bền nhất có thể được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 12 inch.



Câu 9: Ước tính chi phí hàng năm (tính bằng tỉ đồng) để một nhà máy loại bỏ $p\%$ chất gây ô nhiễm được cho bởi công thức $C = C(p) = \frac{528p}{100 - p}$, $0 \leq p < 100$.

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi thế nào khi p tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không? Vì sao?
- Xét tính đơn điệu của hàm số $C'(p)$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

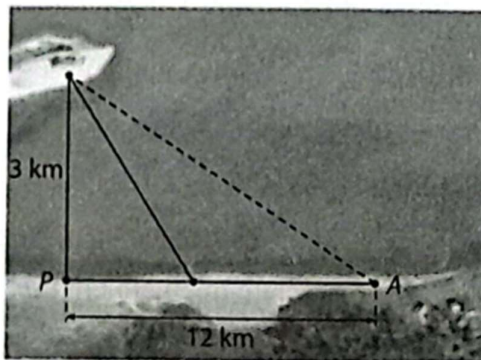
Câu 10: Một xưởng mộc dùng gỗ gụ để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí cho mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5000 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất 1 chiếc bàn. Hỏi mỗi lần xưởng mộc nên đặt mua bao nhiêu đơn vị nguyên liệu và bao lâu đặt giao nguyên liệu một lần để chi phí trung bình hàng ngày (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí lưu trữ) trong chu kì sản xuất giữa các lần giao hàng là ít nhất?

Câu 11: Bác Hưng có một hàng rào thép dài 240 m và muốn rào cánh đồng thành một thửa ruộng hình chữ nhật giáp một con sông thẳng. Bác không cần rào phía cạnh con sông. Hỏi thửa ruộng có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

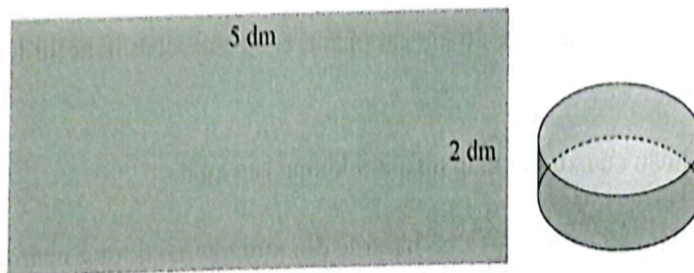
Câu 12: Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}$, $x \geq 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm nào?

Câu 13: Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và có thể tích là 2000 cm^3 . Các kích thước của chiếc hộp là bao nhiêu nếu muốn lượng vật liệu dùng để sản xuất chiếc hộp là nhỏ nhất?

Câu 14: Một hòn đảo nhỏ cách điểm P trên bờ biển khoảng 3 km, một thị trấn ở điểm A cách điểm P 12 km (xem hình vẽ). Nếu một người trên đảo chèo thuyền với vận tốc $2,5 \text{ km/h}$ và đi bộ với vận tốc 4 km/h thì thuyền nên neo đậu ở vị trí nào trên đoạn PA để người đó đến thị trấn trong thời gian ngắn nhất?



- Câu 15:** Chứng tỏ rằng một thùng hình trụ có thể tích V cố định cần ít vật liệu sản xuất nhất (tức là có diện tích bề mặt nhỏ nhất) khi chiều cao của thùng gấp đôi bán kính đáy.
- Câu 16:** Ở 0°C , sự mất nhiệt H (tính bằng $\text{Kcal}/\text{m}^2\text{h}$, ở đây Kcal là kilocalories và $1\text{ Kcal} = 1000\text{ calo}$) từ cơ thể của một người có thể được mô hình hoá bằng công thức $H = 33(10\sqrt{v} - v + 10,45)$, trong đó v là tốc độ gió (tính bằng m/s) (Theo sách *Brief Calculus: An Applied Approach*, 8th edition, Congage Learning, 2009).
- a) Xét tính đơn điệu của hàm số H và giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.
b) Tìm tốc độ thay đổi của H khi $v = 2\text{ m}/\text{s}$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.
- Câu 17:** Doanh thu R (USD) từ việc cho thuê x căn hộ có thể được mô hình hoá bằng hàm số:
 $R = 2x(900 + 32x - x^2)$.
- a) Tìm hàm doanh thu biên.
b) Tìm doanh thu biên khi $x = 14$ và giải thích ý nghĩa thực tiễn của nó.
c) Tìm lượng doanh thu tăng thêm khi số căn hộ cho thuê tăng từ 14 lên 15.
- Câu 18:** Một công ty ước tính rằng chi phí C (USD) để sản xuất x đơn vị sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng công thức: $C = 800 + 0,04x + 0,0002x^2$. Tìm mức sản xuất sao cho chi phí trung bình $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ cho mỗi đơn vị hàng hoá là nhỏ nhất.
- Câu 19:** a) Nếu $C(x)$ (USD) là chi phí sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị là $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Chứng minh rằng nếu chi phí trung bình là nhỏ nhất thì chi phí biên bằng chi phí trung bình.
b) Nếu $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{3/2}$, hãy tìm:
(i) Chi phí, chi phí trung bình và chi phí biên khi sản xuất 100 đơn vị hàng hoá;
(ii) Mức sản xuất mà khi đó sẽ giảm thiểu chi phí trung bình;
(iii) Chi phí trung bình nhỏ nhất.
- Câu 20:** a) Chứng tỏ rằng nếu lợi nhuận $P(x)$ là cực đại thì doanh thu biên bằng chi phí biên.
b) Cho $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ là hàm chi phí và $P(x) = 1700 - 7x$ là hàm cầu. Hãy tìm mức sản xuất sẽ tối đa hoá lợi nhuận.
- Câu 21:** Lợi nhuận một xưởng thu được từ việc sản xuất một mặt hàng được cho bởi công thức $P(q) = -q^3 + 24q^2 + 780q - 5000$ (nghìn đồng) trong đó $q(\text{kg})$ là khối lượng sản phẩm sản xuất được. Xưởng chỉ sản xuất được tối đa 50 kg sản phẩm trong một tuần.
- a) Xưởng sản xuất càng nhiều thì lợi nhuận càng cao.
b) Lợi nhuận lớn nhất khi xưởng sản xuất 26 kg sản phẩm trong một tuần.
c) Sau khi sản xuất được 26 kg sản phẩm, càng sản xuất thêm thì lợi nhuận càng giảm.
d) Lợi nhuận của xưởng thấp nhất khi không sản xuất.
- Câu 22:** Nam dùng một tấm bìa có kích thước $50\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ để làm một chiếc lon hình trụ (không có nắp).



Hỏi cần chọn bán kính đáy hình trụ là bao nhiêu xăngtimét thì lon hình trụ đạt thể tích lớn nhất?

Câu 23: Một chủ nhà hàng kinh doanh phần ăn đồng giá có chiến lược kinh doanh như sau:

- Phí cố định được ước tính trong một năm là 50000 nghìn đồng.
- Chi phí một phần ăn ước tính khoảng 22 nghìn đồng.
- Giá niêm yết trên thực đơn là 30 nghìn đồng.

Trong bài này, giả định rằng tất cả các phần ăn chế biến sẵn đều được bán hết và kí hiệu x là số phần ăn phục vụ trong một năm, giả sử x thuộc khoảng $[5000; 25000]$

a) Gọi $C(x)$ là tổng chi phí hằng năm cho x phần ăn này. Xác định $C(x)$.

b) Chứng tỏ rằng giá thành của một phần ăn cho bởi biểu thức $D(x) = 22 + \frac{50000}{x}$ (nghìn đồng)

c) Sử dụng đồ thị, hãy xác định điểm hoà vốn của nhà hàng, tức là số lượng phần ăn tối thiểu phải được phục vụ hằng năm để hoạt động của nhà hàng tạo ra lợi nhuận. Hãy chứng minh điều đó.

d) Chứng minh rằng tổng lợi nhuận hằng năm cho x phần ăn được biểu thị bởi: $L(x) = 8x - 50000$ (nghìn đồng).

e) Mục tiêu của chủ nhà hàng là tạo ra lợi nhuận ít nhất là 120000 nghìn đồng mỗi năm. Biết rằng nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm, hỏi trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất bao nhiêu phần ăn để đạt được mục tiêu trên?

Câu 24: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 800cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.

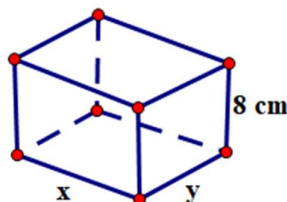
Chiều cao hộp là 8 cm, các kích thước khác là $x(\text{cm}), y(\text{cm})$ với $x > 0$ và $y > 0$.

a) Chứng tỏ rằng $y = \frac{100}{x}$.

b) Tìm diện tích toàn phần $S(x)$ của chiếc hộp theo x .

c) Khảo sát hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Tìm kích thước của hộp để tiết kiệm vật liệu nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mi-li-mét.)



Câu 25: Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: [A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016](#)).

a) Tìm thời điểm $t(0 \leq t \leq 70)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

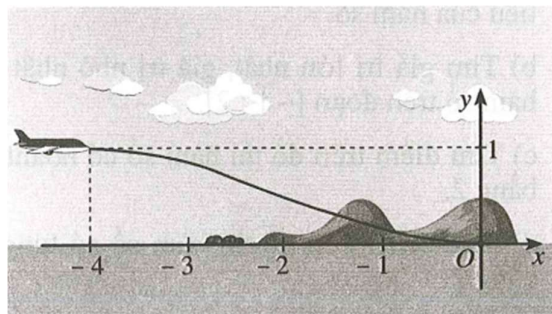
b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50km).

c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 70$. Xác định hàm số $v(t)$.

d) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

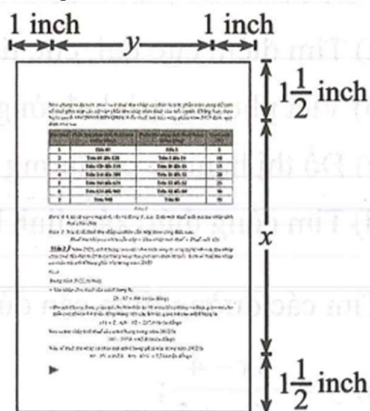
e) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Câu 26: Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình. Biết đường bay của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu hạ cánh có tọa độ $(-4;1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc tọa độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

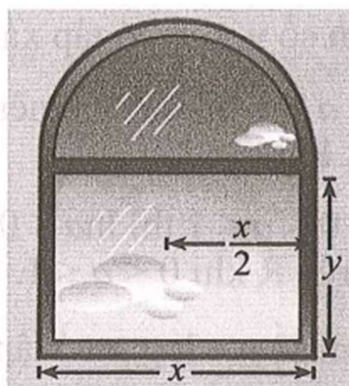


- Tìm công thức xác định hàm số mô phỏng đường bay của máy bay trên đoạn $[-4;0]$.
- Khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất bao nhiêu dặm? (Biết đơn vị trên hệ trục tọa độ là dặm).
- Khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang bao nhiêu dặm?

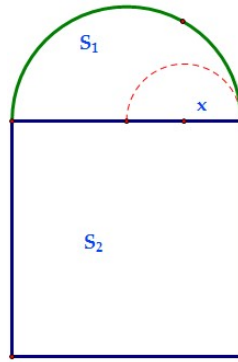
Câu 27: Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở hình thì diện tích phần in chữ trên trang sách là $24inch^2$. Tính kích thước của trang sách để diện tích giấy cần sử dụng là ít nhất?



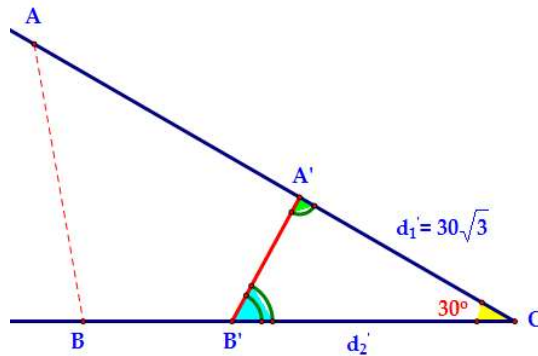
Câu 28: Một cửa sổ gồm phần dưới là một hình chữ nhật và phần vòm có hình bán nguyệt được mô tả ở hình. Tìm x, y để diện tích của cửa sổ lớn nhất, biết chu vi của cửa sổ là 5 m.



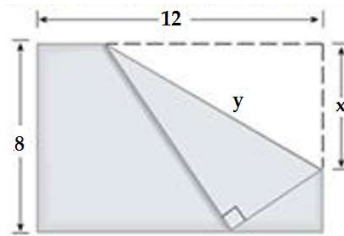
Câu 29: Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Gọi d là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định d để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



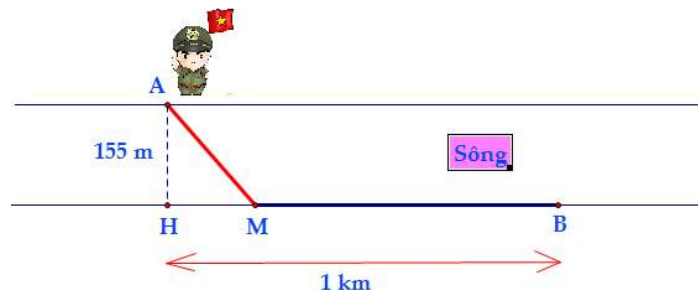
Câu 30: Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ) biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\angle AOB = 30^\circ$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì A cách O một khoảng bằng $30\sqrt{3} (m)$. Tìm khoảng cách B đến O lúc đó?



Câu 31: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12cm và chiều rộng 8cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm dưới đáy như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



Câu 32: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 155m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, vận tốc dòng nước bằng 0 và mục tiêu B cách vị trí H là 1 km (xem hình vẽ)



Quý phụ huynh và các em học sinh đăng ký khóa học

1. Zalo thầy Thuận Toán: 0869998668

zalo.me/84869998668

2. Facebook thầy:

<https://www.facebook.com/Thaygiaothuan.99/>

3. Fanpage thầy:

<https://www.facebook.com/thaythuantoan>

4. Tiktok thầy:

https://www.tiktok.com/@thay_hothucthuan

5. Kênh Youtube thầy:

<https://www.youtube.com/@HoThucThuanOfficial>