



**TÀI LIỆU THUỘC KHÓA HỌC
“LIVE VIP 9+ TOÁN”**

**ĐĂNG KÝ HỌC EM INBOX THẦY TU
VẤN NHÉ!**

TOÁN THỰC TẾ LỚP 12 SGK MỚI **(Chuẩn cấu trúc SGK form mới)**

BÀI 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- $M = \max_D f(x)$ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \text{ thì } f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M. \end{cases}$
- $m = \min_D f(x)$ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \text{ thì } f(x) \geq m \\ \exists x_1 \in D \text{ sao cho } f(x_1) = m. \end{cases}$

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng bằng đạo hàm

- Lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó.
- Căn cứ vào bảng biến thiên, kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Chú ý: Với hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm, ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a; b]$ như sau:

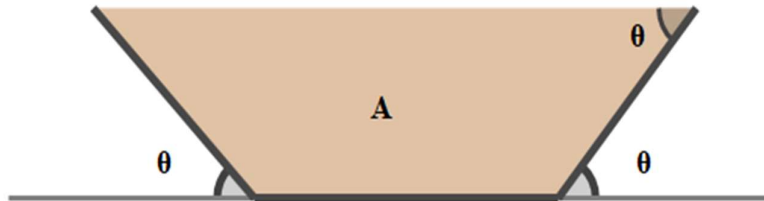
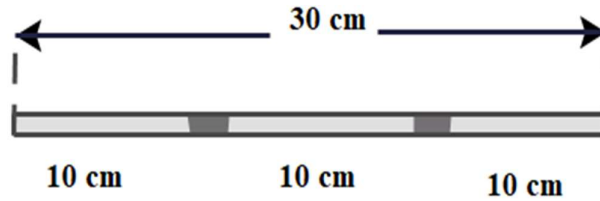
- Bước 1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
- Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 2.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Máng xối nước mưa được làm bằng một miếng nhôm rộng 30 cm. Sau khi đánh dấu chiều dài 10cm từ mỗi cạnh, miếng nhôm được gập lên một góc θ (xem hình vẽ). Diện tích $S(\text{cm}^2)$ của mặt cắt ngang của máng

được biểu thị dưới dạng một hàm số của θ như sau: $S = S(\theta) = 100 \sin \theta (\cos \theta + 1); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Tìm góc θ để diện tích S là lớn nhất (góc θ này sẽ cho phép nước chảy nhiều nhất qua máng xối)

Lời giải

Ta có: $S(\theta) = 100 \sin \theta \cos \theta + 100 \sin \theta = 50 \sin 2\theta + 100 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Suy ra, $S'(\theta) = 100 \cos 2\theta + 100 \cos \theta = 100(\cos 2\theta + \cos \theta)$.

Do đó trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $S'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Mặt khác, ta có: $S(0) = 0; S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100; S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 75\sqrt{3}$.

Vậy để diện tích S của mặt cắt ngang của máng lớn nhất thì góc uốn θ phải bằng $\frac{\pi}{3}$.

Câu 2. Một công ty ước tính rằng tổng lợi nhuận P (nghìn đồng) cho một sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng hàm số $P(x) = -x^3 + 450x^2 + 52500x$, trong đó x là số lượng đơn vị sản phẩm đó được sản xuất và bán ra. Mức sản xuất nào sẽ mang lại lợi nhuận lớn nhất? Khi đó lợi nhuận lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Xét hàm số $P(x) = -x^3 + 450x^2 + 52500x, x \geq 0$.

Ta có: $P'(x) = -3x^2 + 900x + 52500; P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 350$ (do $x \geq 0$);

$P(0) = 0; P(350) = 30625000$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0	350	$+\infty$
P'		+	-
P	0	30625000	$-\infty$

Do đó, $\max_{[0; +\infty)} P(x) = P(350) = 30625000$

Vậy để đạt lợi nhuận lớn nhất thì công ty đó cần sản xuất và bán ra 350 đơn vị sản phẩm.

Câu 3. Lợi nhuận thu được P của một công ty khi dùng số tiền s chi cho quảng cáo được cho bởi công thức

$P = P(s) = -\frac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400, s \geq 0$. Ở đây các số tiền được tính bằng đơn vị nghìn USD.

a) Tìm số tiền công ty phải chi cho quảng cáo để mang lại lợi nhuận tối đa.

b) Lợi nhuận thu được của công ty thay đổi thế nào khi số tiền chi cho quảng cáo thay đổi?

Lời giải

a) Ta có: $P' = -\frac{3}{10}s^2 + 12s$; $P' = 0 \Leftrightarrow s = 0$ hoặc $s = 40$.

Lập bảng biến thiên hàm số:

x	0	40	$+\infty$
P'		+	-
P	400	3600	$-\infty$

Vậy để mang lại lợi nhuận tối đa, số tiền công ty phải chi cho quảng cáo là 40 nghìn USD.

b) Từ bảng biến thiên suy ra:

+ Lợi nhuận của công ty tăng dần khi số tiền chi cho quảng cáo tăng từ 0 đến 40 nghìn USD.

+ Lợi nhuận của công ty giảm dần khi số tiền chi cho quảng cáo lớn hơn 40 nghìn USD và khi đó, càng tăng tiền quảng cáo thì lợi nhuận càng giảm.

Câu 4. Giả sử một chiếc xe tải khi di chuyển với tốc độ x dặm/giờ sẽ tiêu thụ nhiên liệu ở mức

$\frac{1}{200} \left(\frac{2500}{x} + x \right)$ gallon/dặm. Nếu giá nhiên liệu là 3,6 USD/gallon thì chi phí nhiên liệu C (tính bằng USD)

khi lái xe 200 dặm với tốc độ x dặm/giờ được cho bởi công thức $C = C(x) = 3,6 \cdot \left(\frac{2500}{x} + x \right)$

Ở đây, dặm và gallon là những đơn vị đo lường phổ biến của Mỹ. Biết rằng tốc độ (dặm/giờ) của xe tải trên một tuyến đường cao tốc bị hạn chế trong khoảng $[10; 75]$. Hỏi:

a) Lái xe ở tốc độ nào thì chi phí nhiên liệu sẽ ít nhất?

b) Nếu người lái xe tải được trả lương 28 USD/giờ và tiền lương được cộng vào chi phí nhiên liệu thì tốc độ di chuyển của xe tải là bao nhiêu để chi phí tiết kiệm nhất (tức là tổng chi phí mà công ty phải trả cho lái xe và chi phí nhiên liệu là nhỏ nhất)?

Lời giải

a) Ta có: $C'(x) = 3,6 \left(-\frac{2500}{x^2} + 1 \right)$; $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50$ (do $x \in [10; 75]$).

Mặt khác, $C(10) = 936$; $C(50) = 360$; $C(75) = 390$.

Vậy xe tải đi với tốc độ 50 dặm/giờ thì chi phí nhiên liệu sẽ ít nhất.

b) Trong trường hợp người lái xe tải được trả lương 28 USD/giờ (khi xe chạy) thì chi phí $C(x)$ khi lái xe s

dặm là $C(x) = 28 \cdot \frac{s}{x} + \frac{s}{200} \left(\frac{2500}{x} + x \right) = s \left(\frac{81}{2x} + \frac{x}{200} \right)$. Ta có: $C'(x) = s \left(-\frac{81}{2x^2} + \frac{1}{200} \right)$. Suy ra $C'(x) < 0$ với

mọi $x \in [10; 75]$, tức là hàm số $C(x)$ nghịch biến trên đoạn này.

Vậy khi xe tải di chuyển với tốc độ 75 dặm/giờ thì sẽ tiết kiệm chi phí nhất.

Câu 5. Hai nguồn nhiệt đặt cách nhau s mét, một nguồn có cường độ a đặt ở điểm A và một nguồn có cường độ b đặt ở điểm B . Cường độ nhiệt tại điểm P nằm trên đoạn thẳng nối A và B được tính theo công thức

$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$, trong đó x (m) là khoảng cách giữa P và A . Tại điểm nào nằm giữa A và B , nhiệt độ sẽ thấp nhất?

Lời giải

Xét hàm số $I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$, $0 < x \leq s$. Ta có: $I' = -\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{(s-x)^3} = \frac{2[bx^3 - a(s-x)^3]}{x^3(s-x)^3}$, $0 < x < s$.

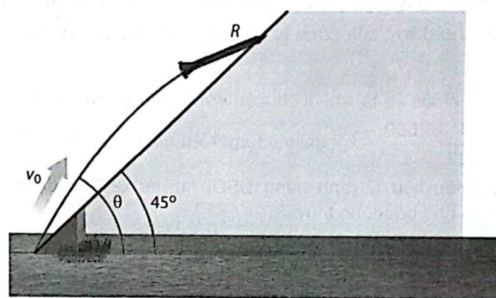
Do đó: $I' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{s-x} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \Leftrightarrow x = \frac{s\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

Lập bảng biến thiên hàm số:

x	0	$\frac{s\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$	$+\infty$
I'	-	0	+
I	$+\infty$	$I(x)$	$+\infty$

Vậy tại điểm P trên đoạn AB và cách A một khoảng $PA = x = \frac{s\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ (m) thì nhiệt độ sẽ thấp nhất.

Câu 6. Một vật được phóng lên trời theo một góc xiên θ ($45^\circ < \theta < 90^\circ$) so với phương ngang với vận tốc ban đầu là v_0 (feet/giây) tính từ chân mặt phẳng nghiêng tạo một góc 45° so với phương ngang (xem hình vẽ). Nếu bỏ qua sức cản của không khí thì quãng đường R (tính bằng feet, 1 foot = 0,3048m) mà vật di chuyển lên mặt phẳng nghiêng được cho bởi hàm số $R(\theta) = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{16} \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$. Góc ném θ nào làm cho quãng đường R lớn nhất? Giá trị lớn nhất của R là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có: $R(\theta) = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{16} (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{32} (\sin 2\theta - \cos 2\theta - 1), 45^\circ < \theta < 90^\circ$.

Do đó: $R'(\theta) = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{16} (\cos 2\theta + \sin 2\theta); R'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = 135^\circ \Leftrightarrow \theta = 67,5^\circ$ (do $45^\circ < \theta < 90^\circ$).

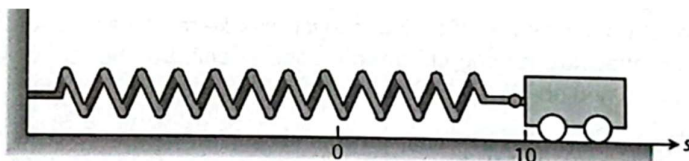
Mặt khác, $R(45^\circ) = 0; R(67,5^\circ) = \frac{v_0^2 (2 - \sqrt{2})}{32}; R(90^\circ) = 0$.

Bảng biến thiên:

θ	45°	$67,5^\circ$	90°	
R'		+	0	-
R	0	$\frac{v_o^2(2-\sqrt{2})}{32}$	0	

Vậy khi góc ném $\theta = 67,5^\circ$ thì quãng đường R là lớn nhất và bằng $\frac{v_0^2 (2 - \sqrt{2})}{32}$ feet, trong đó v_0 (feet/giây) là vận tốc ban đầu của vật.

Câu 7. Một chiếc xe nhỏ chuyển động không có ma sát, gắn vào tường bằng một lò xo (xem hình vẽ), được kéo ra khỏi vị trí đứng yên 10 cm rồi thả ra tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây để chuyển động trong 4 giây. Vị trí $s(\text{cm})$ tại thời điểm t giây là $s = 10 \cos \pi t$.



- a) Tốc độ lớn nhất của xe là bao nhiêu? Khi nào xe chuyển động với tốc độ như vậy, khi đó xe đang ở vị trí nào và gia tốc lúc đó có độ lớn là bao nhiêu?
b) Xe ở đâu khi độ lớn gia tốc là lớn nhất? Khi đó vận tốc của xe là bao nhiêu?

Lời giải

a) Vận tốc của xe là $v(t) = s'(t) = -10\pi \sin \pi t (\text{cm/s})$.

Do đó, gia tốc của xe là $a(t) = v'(t) = -10\pi^2 \cos \pi t (\text{cm/s}^2)$.

Ta có: $v(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right\}$ (do $t \in [0; 4]$).

Mặt khác, $v(0) = v(4) = 0; v\left(\frac{1}{2}\right) = v\left(\frac{3}{2}\right) = v\left(\frac{5}{2}\right) = v\left(\frac{7}{2}\right) = -10\pi$.

Tốc độ là độ lớn của vận tốc, tức là $|v(t)|$.

Vậy tốc độ lớn nhất của xe là $10\pi (\text{cm/s})$, đạt được tại các thời điểm: $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}$ giây.

Tại các thời điểm đó, xe đều có gia tốc bằng 0 và tại vị trí $s = 0$ (tức là ở vị trí xe đứng yên, khi mà chưa kéo lò xo).

b) Ta có: $a'(t) = 10\pi^3 \sin \pi t; a'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Khi đó, $a(0) = a(2) = a(4) = -10\pi^2; a(1) = a(3) = 10\pi^2$.

Độ lớn gia tốc của xe là $|a(t)|$. Do đó, độ lớn gia tốc là lớn nhất tại các thời điểm 0; 1; 2; 3; 4 giây.

Khi $t = 0; 2; 4$ giây, xe ở vị trí $s = 10(\text{cm})$; khi $t = 1; 3$ giây, xe ở vị trí $s = -10(\text{cm})$. Vậy độ lớn gia tốc của xe lớn nhất tại các vị trí $s = 10(\text{cm})$ hoặc $s = -10(\text{cm})$ (tức là khi xe ở mép phải hoặc mép trái của quãng đường dao động) và tại các vị trí đó, vận tốc của xe đều bằng 0.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động theo phương ngang có tọa độ xác định bởi phương trình

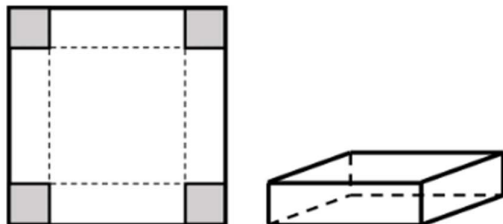
$x(t) = -0,01t^4 + 0,12t^3 + 0,3t^2 + 0,5$ với x tính bằng mét, t tính bằng giây, $0 \leq t \leq 6$. Tìm thời điểm mà tốc độ của chất điểm lớn nhất.

Lời giải

$v(t) = x'(t) = -0,04t^3 + 0,36t^2 + 0,6t$

$\max_{[0;6]} v(t) = v(6) = 7,92 (\text{m/s})$.

Câu 9. Từ một miếng bìa hình vuông có cạnh bằng 12 cm, người ta cắt bỏ đi bốn hình vuông nhỏ có cạnh bằng $x(\text{cm})$ ở bốn góc và gấp lại thành một hình hộp không nắp. Tìm x để thể tích của hình hộp là lớn nhất.



Lời giải

Thể tích chiếc hộp là $V = x(12 - 2x)^2$ với $0 < x < 6$.

$$\max_{[0;6]} V = V(2) = 128 \text{ (cm}^3\text{)}. \text{ Vậy } x = 2 \text{ cm.}$$

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính 1 cm. Đặt $\hat{A} = \alpha (0 < \alpha < \pi)$.

a) Viết biểu thức tính diện tích S của tam giác ABC theo α .

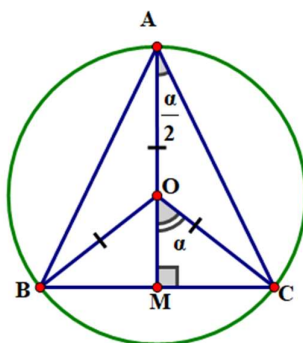
b) Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC.

Lời giải

a) Gọi M là trung điểm của BC , ta có $\widehat{MOC} = 2\widehat{OAC} = \widehat{BAC} = \alpha$.

Do đó: $AM = AO + OM = 1 + \cos \alpha$,

$$BC = 2MC = 2 \sin \alpha. \text{ Suy ra } S = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$



$$\text{b) } S' = \cos \alpha (1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1;$$

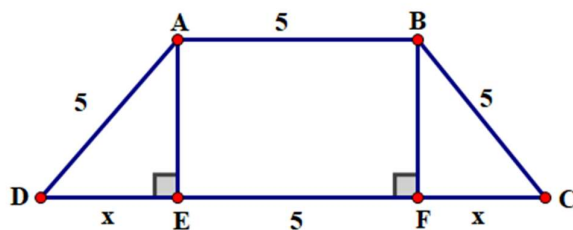
$$S' = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -1 \text{ hoặc } \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pi \text{ (loại) hoặc } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Lập bảng biến thiên, ta có $\max_{(0;\pi)} S = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2).$

Câu 11. Một mảnh vườn hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên bằng nhau và bằng 5 . Tìm diện tích lớn nhất của mảnh vườn đó.

Lời giải

Xét hình thang cân ABCD có $AB // CD$ như hình bên. Ta có diện tích hình thang cân ABCD là



$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = (5 + x)\sqrt{25 - x^2} \text{ với } (0 \leq x < 5).$$

$$S' = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}; S' = 0 \Leftrightarrow x = 2, 5.$$

Lập bảng biến thiên, ta có $\max_{[0,5]} S = S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4}$

Câu 12. Trong một ngày, tổng chi phí để một xưởng sản xuất x (kg) thành phẩm được cho bởi hàm số $C(x) = 2x^3 - 30x^2 + 177x + 2592$ (nghìn đồng). Biết giá bán mỗi kilôgam thành phẩm là 513 nghìn đồng và công suất tối đa của xưởng là 20 kg trong một ngày. Khối lượng thành phẩm xưởng nên sản xuất trong một ngày là bao nhiêu để lợi nhuận thu được của xưởng trong một ngày là cao nhất?

Lời giải

Lợi nhuận xưởng thu được trong một ngày khi sản xuất x (kg) thành phẩm là

$$P(x) = 513x - (2x^3 - 30x^2 + 177x + 2592)$$

$$\max_{[0;20]} P(x) = P(14) = 2504. \text{ Vậy } x = 14 \text{ kg.}$$

Câu 13. Giá bán P (đồng) của một sản phẩm thay đổi theo số lượng Q sản phẩm ($0 \leq Q \leq 1500$) được cung cấp ra thị trường theo công thức $P = \sqrt{1500 - Q}$. Tính số lượng sản phẩm nên được cung cấp ra thị trường để doanh thu $R = PQ$ lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Doanh thu } R = PQ = Q\sqrt{1500 - Q}$$

$$\text{Ta có } R' = \frac{-3Q + 3000}{2\sqrt{1500 - Q}}; R' = 0 \Leftrightarrow Q = 1000.$$

So sánh $R(0), R(1000)$ và $R(1500)$ ta có R lớn nhất khi $Q = 1000$.

Câu 14. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

- Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?
- Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

a) Khi $t = 0$, ta có: $V(0) = 4$. Vậy ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

b) 30 giây = 0,5 phút. Khi $t = 0,5$, ta có: $V(0,5) = 41,5$.

Vậy dung tích của bình xăng trong xe là 41,5 lít.

c) Ta có: $V'(t) = 300(2t - 3t^2)$ với $0 \leq t \leq 0,5$.

$$V''(t) = 300(2 - 6t), \text{ có } V''(t) = 0 \text{ khi } t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Lại có } V'\left(\frac{1}{3}\right) = 100, V'(0) = 0, V'(0,5) = 75.$$

Vậy $\max_{[0;0,5]} V'(t) = 100$ tại $t = \frac{1}{3}$ hay khi xăng chảy vào bình xăng thì ở thời điểm $t = \frac{1}{3}$ phút có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 15. Bác Lâm muốn gò một cái thùng bằng tôn dạng hình hộp chữ nhật không nắp có đáy là hình vuông và đựng đầy được 32 lít nước. Gọi độ dài cạnh đáy của thùng là x (dm), chiều cao của thùng là h (dm).

a) Thể tích của thùng là $V = x^2 \cdot h$ (dm³).

b) Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là: $S = 4xh + x^2$ (dm²).

c) Đạo hàm của hàm số $S(x) = \frac{128}{x} + x^2$ là $S'(x) = \frac{128}{x^2} + 2x$.

d) Để làm được cái thùng mà tốn ít nguyên liệu nhất thì độ dài cạnh đáy của thùng là 4 dm.

Đ	S
Đ	S
Đ	S
Đ	S

Lời giải

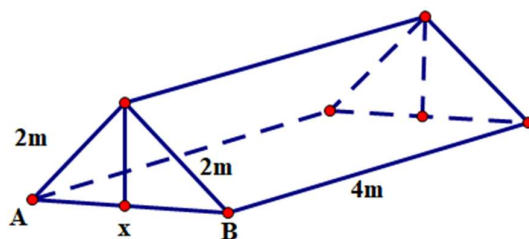
a)Đ;

b) Đ;

c)S;

d)S

Câu 16. Nhóm bạn Đức dựng trên một khu đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình vuông có độ dài cạnh 4 m như Hình 9 với hai mép tấm bạt sát mặt đất. Tính khoảng cách AB để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.



Hình 9
Lời giải

$$AB = 2\sqrt{2}m$$

Câu 17. Nồng độ C của một loại hoá chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức:

$$C(t) = \frac{3t}{27+t^3} \text{ với } t \geq 0 \text{ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).}$$

Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là cao nhất?

Lời giải

Ứng với $t = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ thì $C(t)$ đạt giá trị lớn nhất, tức là sau khoảng 2,38 giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là cao nhất.

Câu 18. Khối lượng riêng S (kg / dm³) của nước phụ thuộc vào nhiệt độ T (°C) được cho bởi công thức:

$$S = \frac{5,755}{10^8} T^3 - \frac{8,521}{10^6} T^2 + \frac{6,540}{10^5} T + 0,99987 \text{ với } 0 < T \leq 25$$

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

a) Tính khối lượng riêng của nước ở nhiệt độ 25°C.

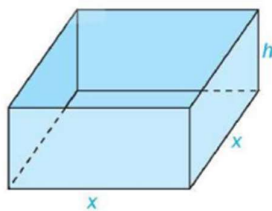
b) Ở nhiệt độ nào thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất?

Lời giải

a) 0,99708 kg / dm³.

b) Ở nhiệt độ khoảng 4°C thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất khoảng 1,00000 kg / dm³.

Câu 19. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108cm² như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

Lời giải

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x (cm, $x > 0$) và chiều cao là h (cm, $h > 0$)

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108cm² nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$ (cm) (điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4}$ (cm³).

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\frac{x^3}{4} + 27x$ ($0 < x < \sqrt{108}$)

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}$, $V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $0 < x < \sqrt{108}$)

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0	6	$\sqrt{108}$
V'		+	-
V	0	108	$y(\sqrt{108})$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6$ cm

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3$ (cm).

Câu 20. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi r, h lần lượt là bán kính hình tròn đáy và chiều cao của hình trụ ($r, h > 0$).

Khi đó ta có $V = \pi r^2 h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

Diện tích mặt trên và mặt dưới của bình là $2\pi r^2$ (cm^2).

Chi phí vật liệu sản xuất mặt trên và mặt dưới là $1,2 \cdot 2\pi r^2 = 2,4\pi r^2$ (nghìn đồng).

Diện tích mặt bên của bình là $2\pi rh$ (cm^2).

Tổng chi phí là: $2,4\pi r^2 + 1,5\pi rh = 2,4\pi r^2 + \frac{1500}{r}$ (nghìn đồng).

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2,4\pi r^2 + \frac{1500}{r}$, $r > 0$.

Có $y' = 4,8\pi r - \frac{1500}{r^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4,8\pi r - \frac{1500}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}} \approx 4,6$.

Lập bảng biến thiên của hàm số



Dựa vào bảng biến thiên ta có chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình nhỏ nhất khoảng 485,6 nghìn đồng khi r khoảng 4,6 cm và h khoảng 15 cm.

Câu 21. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Xét phương trình chuyển động chất điểm $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5, t \in [0; 5]$

Vận tốc tức thời của chất điểm là $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1, t \in [0; 5]$.

Ta có $v'(t) = -6t + 12$. Khi đó trên khoảng $(0; 5), v'(t) = 0$ khi $t = 2$. Ta có $v(0) = 1; v(2) = 13; v(5) = -14$.

Do đó $\max_{[0; 5]} v(t) = 13$ tại $t = 2$.

Vậy chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng 13m/s tại thời điểm $t = 2s$ trong 5 giây đầu tiên.

Câu 22. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, 0 \leq t \leq 0,5$

(Nguồn: R.I.Charles et al. Algebra, Pearson)



a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có: $V(0) = 4$. Do đó ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

b) Sau khi bơm 30 giây, tức 0,5 phút thì bình xăng đầy. Ta có $V(0,5) = 41,5$. Vậy dung tích của bình xăng trong xe là 41,5 lít.

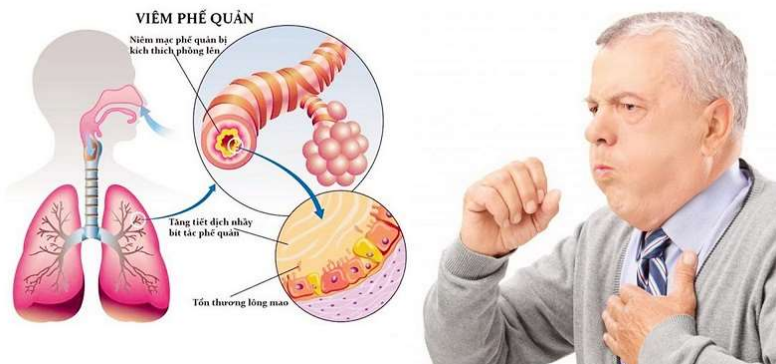
c) Ta có $V'(t) = 300(2t - 3t^2), t \in [0; 0,5]$. Có $V''(t) = 300(2 - 6t)$.

Khi đó trên khoảng $(0; 0,5), V''(t) = 0$ khi $t = \frac{1}{3}$.

$V'(0) = 0; V'\left(\frac{1}{3}\right) = 100; V'(0,5) = 75$. Do đó $\max_{[0; 0,5]} V'(t) = 100$ tại $t = \frac{1}{3}$.

Vậy xăng chảy vào bình ở thời điểm $t = \frac{1}{3}s$ kể từ khi bắt đầu bơm có tốc độ tăng.

Câu 23. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức: $V = k(R-r)r^2, 0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?



Lời giải

Xét hàm số $V = k(R-r)r^2, 0 \leq r < R$.

Ta có $V'(r) = k(-r^2) + k(R-r).2r = rk(2R-3r)$. Khi đó trên nửa khoảng $[0; R)$, $V'(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2}{3}R \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

r	0	$\frac{2R}{3}$	R
$V'(r)$	+	0	-
$V(r)$	0	$\frac{4kR^3}{27}$	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{[0; R)} V = \frac{4}{27}kR^3$ tại $r = \frac{2}{3}R$. Vậy $r = \frac{2}{3}R$ thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất.

Câu 24. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4m. Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?



Lời giải

Nửa chu vi khung cửa sổ là $4 : 2 = 2(m)$.

Gọi chiều dài khung cửa sổ là $x(m)$ ($0 < x < 2$).

Chiều rộng khung cửa sổ là $2 - x$ (m).

Diện tích khung cửa sổ là $S(x) = x(2 - x) = 2x - x^2$ (m^2).

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S(x)$.

Ta có $S'(x) = 2 - 2x$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	1	0

Diện tích của cửa sổ lớn nhất là $1 m^2$ khi đó khung cửa sổ có dạng hình vuông cạnh 1m.

Câu 25. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng /kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính

theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p .

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Lời giải

a) Từ $p = 15 - \frac{1}{2}q \Leftrightarrow q = 30 - 2p$. Khi đó $R = pq = p(30 - 2p) = -2p^2 + 30p$.

b) Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $R = -2p^2 + 30p$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

Có $R' = -4p + 30$; $R' = 0 \Leftrightarrow -4p + 30 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{15}{2}$.

Bảng biến thiên

p	0	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
R'	+	0	-
R	0	$\frac{225}{2}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_D y = R(7,5) = 112,5$

Vậy bán mỗi sản phẩm giá 7,5 nghìn đồng thì đạt doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng.

Câu 26. Hộp sữa 1l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi chiều cao của hộp là h (cm)

Thể tích của hộp là: $V = h \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$

Diện tích toàn phần của hộp là: $y = S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{4}{x}$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

$$y' = 4x - \frac{4}{x^2}; y' = 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	0	1			$+\infty$	
y'		-	0	+		
y	$+\infty$				6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy min $y = y(1) = 6$

Vậy $x = 1$ cm thì diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất và bằng 6cm^2

Quý phụ huynh và các em học sinh đky khóa học

1. Zalo thầy Thuận Toán: 0869998668

zalo.me/84869998668

2. Facebook thầy:

<https://www.facebook.com/Thaygiaothuan.99/>

3. Fanpage thầy:

<https://www.facebook.com/thaythuantuan>

4. Tiktok thầy:

https://www.tiktok.com/@thay_hothucthuan

5. Kênh Youtube thầy:

<https://www.youtube.com/@HoThucThuanOfficial>