



**TÀI LIỆU THUỘC KHÓA HỌC
“LIVE VIP 9+ TOÁN”**

**ĐĂNG KÝ HỌC EM INBOX THẦY TU
VẤN NHÉ!**

**1000 CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG/SAI
(Chuẩn cấu trúc SGK mới)**

BÀI

05

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lý, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2 Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$
- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).



- Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.
- Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
- Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$
- Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

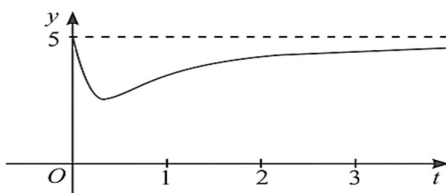
Câu 2: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t}, \quad N(t) \text{ được tính bằng triệu người và } 0 \leq t \leq 50$$

- Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)
- Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)
- Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.
- Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Câu 3: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được

xấp xỉ bởi hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



- Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$
- Hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$
- Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng
- Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

Câu 5: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- Hàm vận tốc là: $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$
- Hạt chuyển động xuống dưới khi $t > 2$
- Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là 9m
- Khi $t > 0$ thì hạt tăng tốc

Câu 6: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

- Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là: $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$
- Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất
- Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.
- Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

Câu 7: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.

Câu 8: Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình

$\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\bar{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;

b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$

c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$

d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa

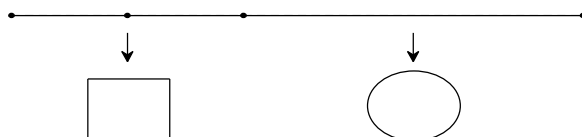
Dạng 2: Một số bài toán tối ưu đơn giản

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



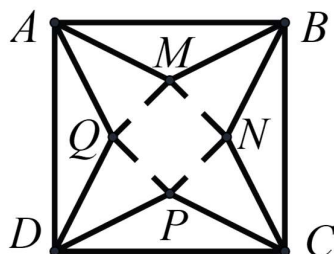
a) Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4+\pi) \cdot x^2 - 2\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

- Câu 2.** Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$ người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$.

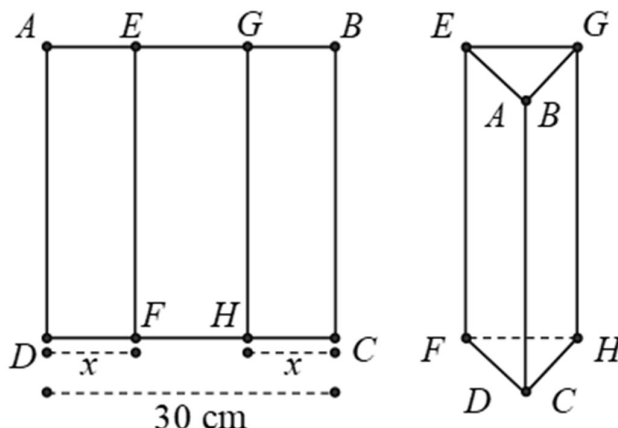
a) Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$

c) Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.

d) Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}$ dm thì thể tích của khối chóp là lớn nhất

- Câu 3.** Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



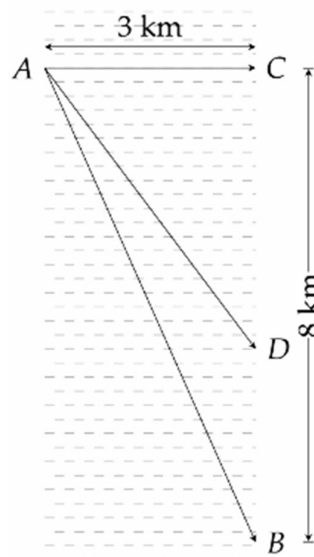
a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG

b) Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2(2x-15)}$

c) Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm)

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250 (cm^3)

Câu 4. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD . Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:



- $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .
- Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ (giờ)
- Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{8 - x}{8}$
- Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .