



**TÀI LIỆU THUỘC KHÓA HỌC
“LIVE VIP 9+ TOÁN”**

**ĐĂNG KÝ HỌC EM INBOX THẦY TU
VẤN NHÉ!**

1000 CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG/SAI (Chuẩn cấu trúc SGK mới)

BÀI

04

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐTHS

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

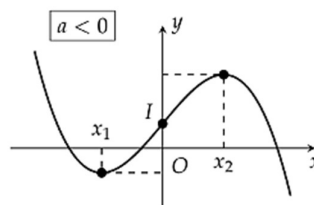
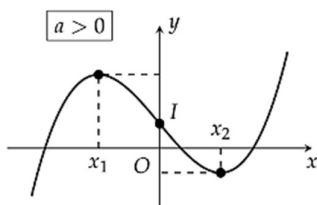
1 Các bước khảo sát hàm số $y = f(x)$

Để khảo sát hàm số $y = f(x)$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

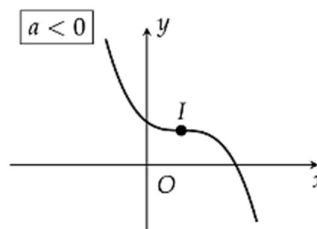
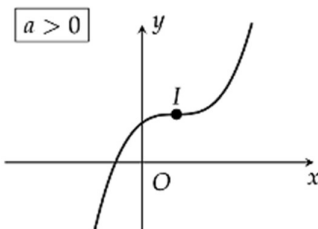
- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
 - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

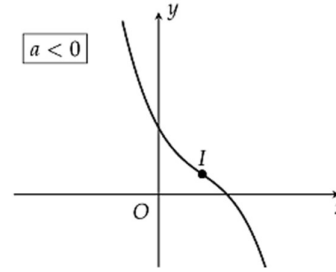
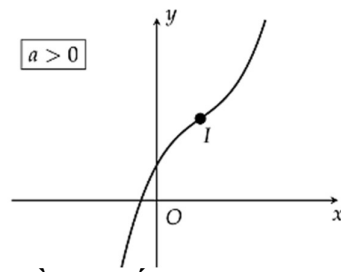
a) **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2 . Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



b) **Trường hợp 2:** $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị



b) **Trường hợp 3:** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị



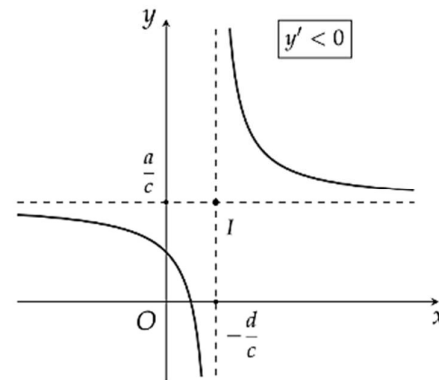
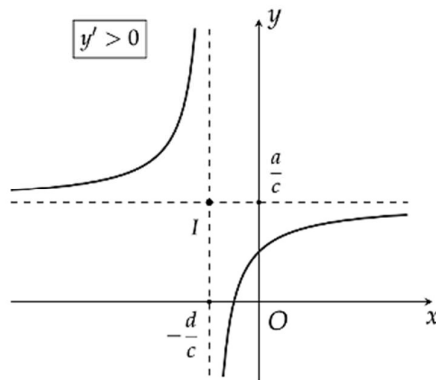
Một số lưu ý cần nhớ về hàm số bậc ba:

- Hàm số không có điểm cực trị khi và chỉ khi $b^2 - 3ac \leq 0$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$
- Liên hệ giữa tổng và tích hạ nghiệm $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$
- Toạ độ tâm đối xứng của đồ thị chính là trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$
- Tiếp tuyến tại tâm đối xứng sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$

3

Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

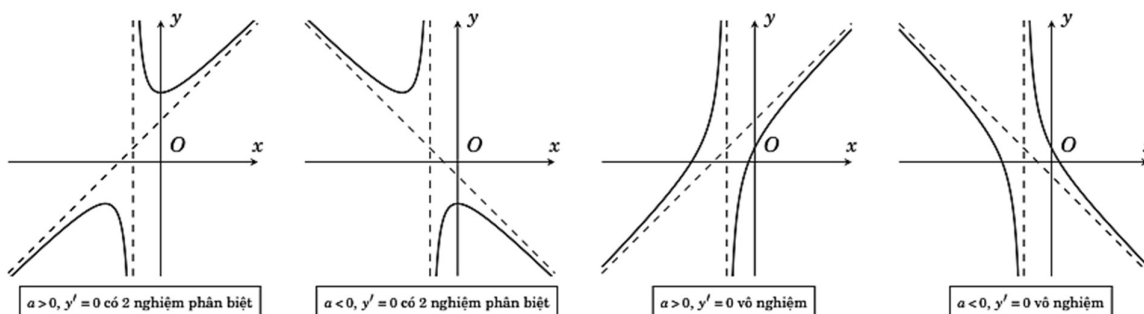
- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$; tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$
- Giao với Ox : $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$; giao với Oy : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$
- Hình dạng đồ thị được minh họa như sau:



4

Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, $a \neq 0, \frac{m}{n} \neq 0$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)
 Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{a(mx+n)^2 - (mx+n)(2mx+b)}{(mx+n)^4}$

- Hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, không có cực trị khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng
- Hình dạng đồ thị được minh họa như sau:



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

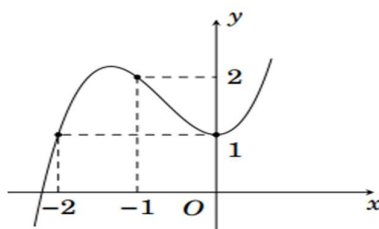
Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

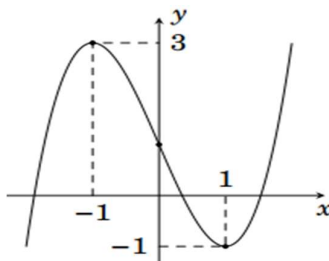
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$
- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; 1)$
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
- $2a + 3b + c = 9$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



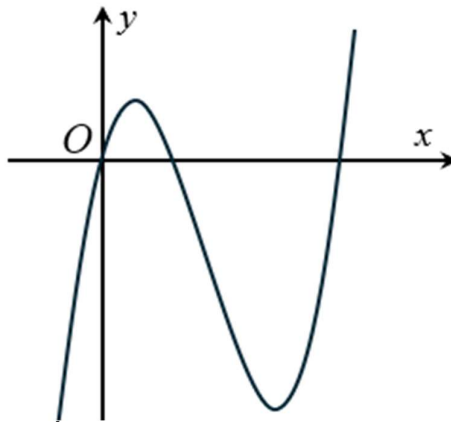
- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0;1)$
- b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng
- c) $a - b + c + d = -1$
- d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			4		$-\infty$
			0			

- a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4
- b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt
- c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm
- d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



- a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.
- c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C) .

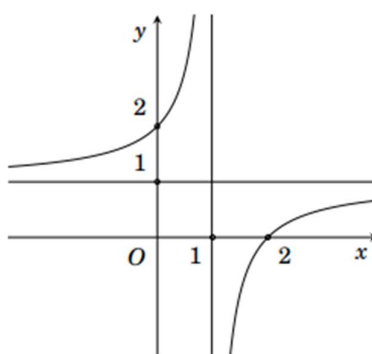
- a) (C) luôn có hai điểm cực trị.
- b) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.
- c) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.
- d) Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$.

Dạng 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 1 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
 - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



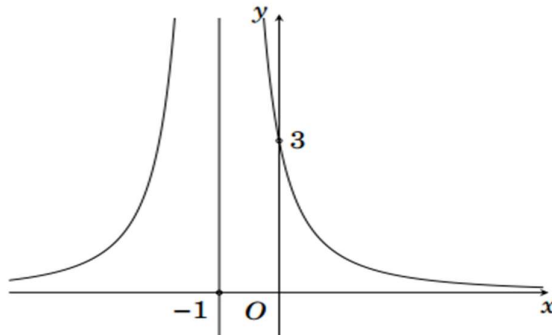
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
- $T = a - 3b - 2c = -3$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$
	$\searrow$		$\swarrow$
	$-\infty$		

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$
- Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3
- $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8



- a) $f'(0) = 3$
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$
- c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8
- d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

- a) Khi $m = 2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$
- b) Khi $m = 2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có tọa độ $I(1; -1)$
- c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ thì $m = 2$
- d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

Dạng 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 2 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, $a \neq 0, m \neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + b.n - m.c}{(mx + n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y' = 0$
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
 - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C) . Khi đó:

- a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$
- b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$
- c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$
- d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng

- Câu 2:** Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$ có đồ thị (C).
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, 0) \cup (2; +\infty)$
 - Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$
 - Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ bằng $-\frac{19}{3}$
 - Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x + y = 0$
- Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C).
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2, -1)$ và $(-1, 0)$
 - Hàm số có hai điểm cực trị.
 - Đồ thị (C) không cắt trục Ox .
 - Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$
- Câu 4:** Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C).
- Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.
 - Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.
 - Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
 - Đồ thị không cắt trục Ox .
- Câu 5:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có đồ thị là (C).
- Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang
 - Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x - 4y + 2 = 0$
 - Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
 - Đồ thị không cắt trục Ox .
- Câu 6:** Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1) với m là số thực
- Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị
 - Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x - 2$
 - Khi $m = 1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3; -5)$
 - Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45°
- Câu 7:** Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x + 1}$
- Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$
 - Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$
 - Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau
 - Đề đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$

- Câu 8:** Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số
- Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$
 - Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số không cắt trục Ox .
 - Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m > 4$
 - Tồn tại 1 điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C)) khi đó tung độ $y_M < -4$
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{-mx^2 + (4m-2)x + 1 - 4m}{x-1}$ có đồ thị là (C) với m là tham số
- Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị
 - Khi $m = 1$ đồ thị hàm số không cắt trục Ox
 - Khi $m < -1$ thì hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x > 0$
 - Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $x - y = 0$
- Câu 10:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C)
- Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4
 - Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$
 - Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$ đi qua điểm $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 - Để phương trình $x^2 + 3x + 3 = m|x+2|$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m > 2$

Quý phụ huynh và các em học sinh đky khóa học

1. Zalo thầy Thuận Toán: 0869998668

[zalo.me/84869998668](https://www.zalo.me/84869998668)

2. Facebook thầy:

<https://www.facebook.com/Thaygiaothuan.99/>

3. Fanpage thầy:

<https://www.facebook.com/thaythuandaytoan>

4. Tiktok thầy:

https://www.tiktok.com/@thay_hothucthuan