



TÀI LIỆU THUỘC KHÓA HỌC
“LIVE VIP 9+ TOÁN”

ĐĂNG KÝ HỌC EM INBOX THẦY TÚ
VẮN NHÉ!

BÀI TOÁN THỰC TIỄN CHẮC CHẮN THI **(Chuẩn Cấu Trúc Form SGK mới 2025)**

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2 , thì sự thay đổi của x là

$\Delta x = x_2 - x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $[x_1; x_2]$.

Giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x tại điểm $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .

- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .

- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

Ví dụ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2m với vận tốc ban đầu 24,5m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$

(giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ (m).

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Ví dụ 2. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Ví dụ 3. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là $C(201) - C(200) = 1004372,625 - 990000 = 14372,625$ (nghìn đồng)

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Ví dụ 4. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$ (triệu đồng), $0 \leq x < 100$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{300x}{100-x}$, $0 \leq x < 100$.

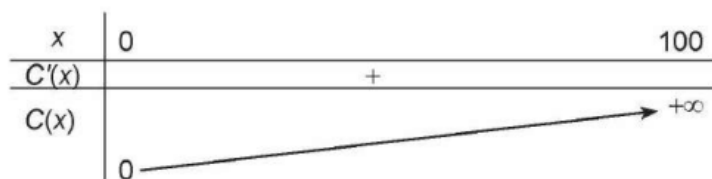
Ta có:

$$- y' = \frac{30000}{(100-x)^2} > 0, \text{ với mọi } x \in [0; 100).$$

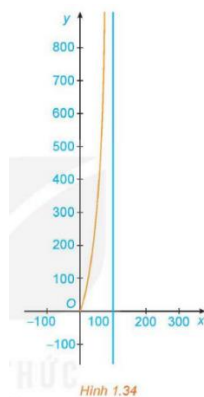
Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$.

$$- \lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{300x}{100-x} = +\infty, \text{ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là } x = 100.$$

Bảng biến thiên:



Đồ thị hàm số như Hình 1.34.



a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa)

2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2. Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Ví dụ 5. Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Đổi 1 lít = 1000cm^3 .

Gọi $r(\text{cm})$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(\text{cm})$ là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là 1000cm^3 nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}; S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên:

r	0	$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(r)$		0	
$S(r)$	$+\infty$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$+\infty$

$$\text{Khi đó: } h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}} = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}.$$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42(\text{cm})$ và chiều cao

$$h = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84(\text{cm})$$

Chú ý. Từ lời giải Ví dụ 5 ta thấy: Nếu hình trụ có thể tích V không đổi thì diện tích bề mặt của hình trụ nhỏ nhất khi chiều cao bằng đường kính đáy.

Ví dụ 6. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Lời giải

Gọi p (nghìn đồng) là giá của mỗi vé; x là số khán giả mua vé. Ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$. Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất.

Giá vé $p_1 = 100$ ứng với $x_1 = 27000$ và giá vé $p_2 = 90$ ứng với $x_2 = 27000 + 3000 = 30000$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p = ax + b$ đi qua hai điểm $(27000; 100)$ và $(30000; 90)$ là

$$p - 100 = \frac{100 - 90}{27000 - 30000}(x - 27000), \text{ hay } p - 100 = -\frac{1}{300}(x - 27000), \text{ tức là } x = -300p + 57000.$$

Hàm doanh thu từ tiền bán vé là

$$R(p) = px = p(-300p + 57000) = -300p^2 + 57000p. \text{ Ta cần tìm } p \text{ sao cho } R \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

$$\text{Ta có: } R'(p) = -600p + 57000; R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 95.$$

Bảng biến thiên:

p	0	95	$+\infty$
$R'(p)$		0	
$R(p)$	0	2 707 500	$-\infty$

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Vậy với giá vé là 95 nghìn đồng một vé thì doanh thu bán vé là lớn nhất.

Ví dụ 7. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là $P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x), x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

- a) Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?
- b) Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

Lời giải

Xét hàm số $y = P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000, x \geq 0$.

Ta có:

- $y' = P'(x) = -0,9x^2 + 72x + 1800; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100$ (vì $x \geq 0$). $P'(x) > 0$ với mọi $x \in [0; 100)$, $P'(x) < 0$ với mọi $x \in (100; +\infty)$.

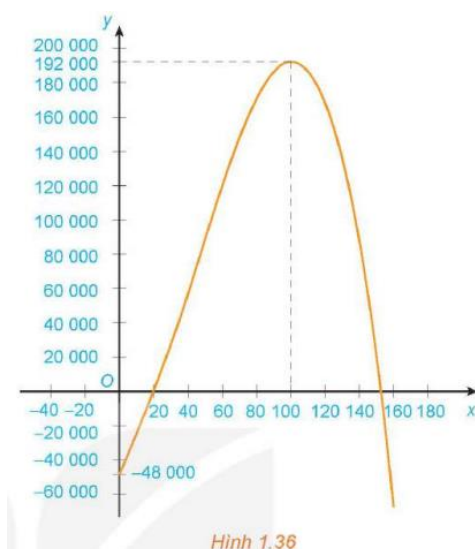
Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100; +\infty)$. Tại $x = 100$, hàm số đạt cực đại và $y_{CD} = y(100) = 192000$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	0	100	$+\infty$
$P'(x)$		0	-
$P(x)$	-48 000	192 000	$-\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.36 (ở đây ta lấy một đơn vị trên trục hoành bằng 1000 đơn vị trên trục tung).



Từ đồ thị đã vẽ suy ra:

a) Đồ thị xuất phát từ điểm $(0; -48000)$, ở phía dưới trục hoành (tức là công ty đang bị lỗ), và giao với trục hoành tại điểm đầu tiên có hoành độ $x = 20$. Do đó, hằng tháng công ty cần sản xuất ít nhất 20 chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn.

b) Từ đồ thị ta thấy khi sản xuất hơn 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng thì càng sản xuất nhiều lợi nhuận càng giảm. Do đó, công ty không nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng.

Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được là $y_{CĐ} = y(100) = 192000$ (nghìn đồng), tức là 192 triệu đồng, đạt được khi sản xuất đúng 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1.26. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- a) Tìm các hàm vận tốc và gia tốc.
- b) Khi nào thì hạt chuyển động lên trên và khi nào thì hạt chuyển động xuống dưới?
- c) Tìm quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$.
- d) Khi nào hạt tăng tốc? Khi nào hạt giảm tốc?

Lời giải

a) Hàm vận tốc là: $v(t) = y' = 3t^2 - 12, t \geq 0$. Hàm gia tốc là: $a(t) = v'(t) = y'' = 6t, t \geq 0$

b) Hạt chuyển động lên trên khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow t > 2$ (do $t \geq 0$)

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 2$ (do $t \geq 0$)

c) Ta có: $y(3) - y(0) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 3 - 3 = -9$

Vậy quãng đường vật đi được trong thời gian $0 \leq t \leq 3$ là 9m.

d) Hạt tăng tốc khi $v(t)$ tăng hay $v'(t) > 0$. Do đó, $6t > 0 \Leftrightarrow t > 0$

Hạt giảm tốc khi $v(t)$ giảm hay $v'(t) < 0 \Leftrightarrow 6t < 0 \Leftrightarrow t < 0$ (không thỏa mãn do $t \geq 0$)

1.27. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là:

$C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3$. a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = \frac{21}{4000}x^2 - x + 50$

b) $C'(100) = \frac{21}{4000} \cdot 100^2 - 100 + 50 = 2,5$ (trăm nghìn đồng).

Chi phí biên tại $x=100$ là 250000 đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm 1 đơn vị hàng hóa tiếp theo (đơn vị hàng hóa thứ 101) là khoảng 250000 đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101 là:

$$C(101) - C(100) = 24752,52675 - 24750 = 2,52675 \text{ (trăm nghìn đồng).}$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(100)$ đã tính ở câu b.

1.28. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá ($0 < x < 100$).

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $100 - x$ (căn).

Số tiền thuê căn hộ sau mỗi lần tăng là: $8000000 + 100000x$

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

$$\begin{aligned} y &= (8000000 + 100000x)(100 - x) = 800000000 - 8000000x + 10000000x - 100000x^2 \\ &= 800000000 + 2000000x - 100000x^2 \end{aligned}$$

Bài toán trở thành tìm x để y lớn nhất. Ta có $y' = -200000x + 2000000$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	10	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	810000000	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh thu lớn nhất khi người quản lí đặt giá thuê căn hộ là $8000000 + 100000 \cdot 10 = 9000000$ (đồng).

Sử dụng kiến thức về cách giải bài toán tối ưu hóa đơn giản để tìm doanh thu lớn nhất:

Bước 1: Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2: Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

1.29. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức $p = \frac{354}{1+0,01x}$, $x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p . Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$.

Lời giải

a) Ta có $p = \frac{354}{1+0,01x} \Leftrightarrow (1+0,01x)p = 354 \Leftrightarrow 0,01x = \frac{354}{p} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{35400}{p} - 100$

Vì $x \geq 0$ nên $x = \frac{35400}{p} - 100 \geq 0 \Leftrightarrow 0 < p \leq 354$

Tập xác định của hàm số là $D = (0; 354]$.

Số sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng là $x = \frac{35400}{240} - 100 = 47,5$

b) $x = \frac{35400}{p} - 100$

1. Tập xác định của hàm số là $D = (0; 354]$.

2. Sự biến thiên

+) Có $x' = -\frac{35400}{p^2} < 0, \forall p \in D$

+) Hàm số luôn nghịch biến với mọi $p \in (0; 354)$.

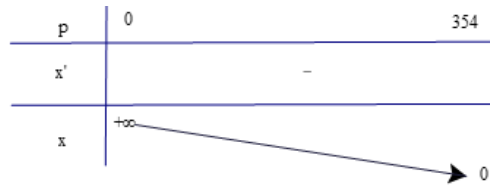
+) Hàm số không có cực trị.

+) Tiệm cận

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} x = \lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\frac{35400}{p} - 100 \right) = +\infty$$

Do đó $p = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+) Bảng biến thiên



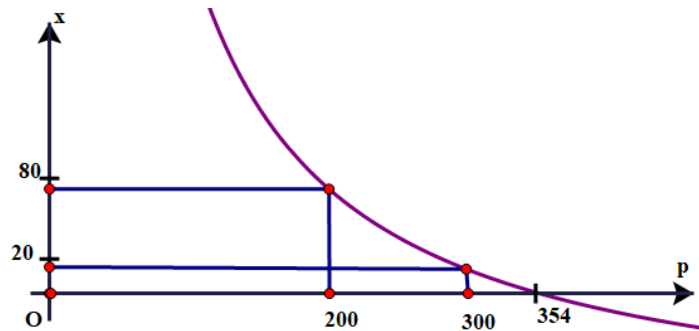
3. Đồ thị:

Ta có: $f(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{354-p}{0,01p} = 0 \Leftrightarrow p = 354$

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ cắt trục hoành tại điểm $(354; 0)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ đi qua các điểm $(300; 18)$; $(200; 77)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ với $p \in (0; 354]$ là đường màu tím:



- Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng, và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$: Vì $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p) = +\infty$ nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

C. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- A. 72. B. 12. C. $-\frac{1}{192}$. D. $\frac{23}{2}$.

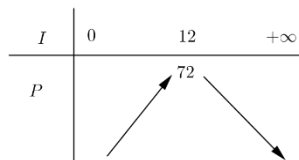
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

$$P' = 12 - I. \quad P' = 0 \Leftrightarrow I = 12.$$

Bảng biến thiên:



Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 2: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14

B. 13

C. 12

D. 11

Lời giải

Chọn C

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n) = (480 - 20n) \cdot n = 480n - 20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Câu toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(x)$ đạt GTLN.

$$F'(n) = 480 - 40n$$

$$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 3: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

A. $27,832^{\circ}C$.

B. $18,4^{\circ}C$.

C. $26,2^{\circ}C$.

D. $25,312^{\circ}C$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10].$$

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^{\circ}C$.

Câu 4: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!**A. 2.250.000****B. 2.350.000****C. 2.450.000****D. 2.550.000****Lời giải****Chọn A**Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).Câu toán trở thành tìm GTLN của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$, ĐK: $x \geq 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
$F'(x)$		0	–
$F(x)$		$F_{\max}$	

Suy ra

 $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biếnthiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x , ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho $F(x)$ lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 5: Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!**A.** 44.000đ**B.** 43.000đ**C.** 42.000đ**D.** 41.000đ**Lời giải****Chọn C**Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x : đồng; $30.000 \leq x \leq 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá $50.000 - x$ thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$(50000 - x) \cdot \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x :

$$40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

$$\text{Ta có: } F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$$

Câu toán trở thành tìm GTLN của

$$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000, \text{ Đk: } 30.000 \leq x \leq 50.000.$$

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$$

Vì hàm $F(x)$ liên tục trên $30.000 \leq x \leq 50.000$ nên ta có:

$$F(30.000) = 0$$

$$F(42.000) = 1.440.000$$

$$F(50.000) = 800.000$$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Câu 6: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó $x(\text{mg})$ và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg**B.** 30mg**C.** 40mg**D.** 20mg**Lời giải****Chọn D**

$$\text{Ta có: } G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$$

$$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{loại}) \\ x = 20(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

X	0	20	$+\infty$
$G'(x)$		+	0
$G(x)$			100

Dựa

vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20mg

Câu 7: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t): 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25

B. 30

C. 20

D. 15

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$G'(t) = 90t - 3t^2$$

$$G''(t) = 90 - 6t$$

$$G''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên:

T	0	15	$+\infty$
$G''(t)$		+	0
$G(t)$			675

Vậy

tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 8: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$

B. $t = 14(h)$

C. $t = 15(h)$

D. $t = 22(h)$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\text{Vậy để } h \text{ lớn nhất thì } \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

Vậy h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Câu 9: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$ ($0 \leq t \leq 90$)

Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét hàm } V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 \quad (0 \leq t \leq 90)$$

$$V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0 \text{ khi } t = 0, t = 60$$

Dựa vào bảng biến thiên, Ta có hàm số V' đồng biến trên $(0;60)$, nghịch biến trên $(60;90)$.

Câu 10: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?

A. 30

B. 40

C. 50

D. 60

Lời giải

Chọn B

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, ($0 < x \leq 60$)

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng)

Số tiền thu được:

$$F(x) = \left(30 - \frac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Câu toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120(\text{loại}) \\ x = 40(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

X	0	40	60
F'(x)	+	0	-
F(x)			

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Câu 11: Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1(kg / m^2)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $(200g / m^2)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\frac{230}{3}kg$

B. $70kg$

C. $72kg$

D. $69kg$

Lời giải

Chọn A

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: $100.1 = 100(kg)$.

Gọi x ($0 < x < 100$) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình $1(kg / m^2)$ tôm giống thu hoạch được: $2000 : 100 = 20(kg)$

Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2(kg / m^2)$

Gọi $F(x)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới ($F(x) : kg$)

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F(x) = (100 - x) \left(20 + \frac{3}{8}x \right) = 2000 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{8}x^2$$

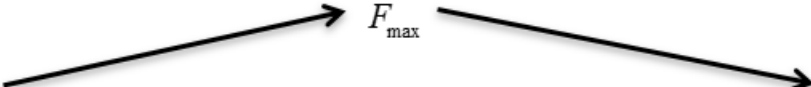
Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ lớn nhất.

Ta có:

$$F'(x) = \frac{25}{2} - \frac{3}{4}x$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{2} - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

X	0	$\frac{70}{3}$	100
F'(x)	+	0	-
F(x)			

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$$100 - \frac{70}{3} = \frac{230}{3} \approx 76,67(kg)$$

Nhận xét:

Làm sao ta có thể tìm được hàm $F(x)$ và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100 \cdot 20 = 2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100 - x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100 - x)(20 + mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm $0,2(kg/m^2)$ thì $100m^2$ giảm $x = 20kg$, sản lượng thu được là $2200kg$.

$$\text{Ta có: } (100 - 20)(20 + m20) = 2200 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$$

Câu 12: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

$$\text{Số phòng cho thuê giảm nếu giá là } x: \frac{(x - 400) + 2}{20} = \frac{x - 400}{10}.$$

$$\text{Số phòng cho thuê với giá } x \text{ là } 50 - \frac{x - 400}{10} = 90 - \frac{x}{10}.$$

$$\text{Tổng doanh thu trong ngày là: } f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10} \right) = -\frac{x^2}{10} + 90x.$$

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$

Bảng biến thiên:

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\swarrow$ 20250 $\searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 13: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

- A.** 29 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29, 5 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe ($0 \leq x \leq 4$).

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200 + 600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x) = (x.200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ ($0 \leq x \leq 4$) đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 14: Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

- A.** 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Lời giải

Chọn A

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150 + (400 - 200x) = 550 - 200x$.

Tổng doanh thu là: $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$.

$$f'(x) = -400x + 550. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow \frac{3025}{8} \searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Câu 15: Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được 10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm, làm tròn đến hàng phần chục) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.

A. 14,7

B. 15

C. 15,2

D. 14

Lời giải

Chọn A

Gọi x ($x > 0$) là bán kính của chiếc xô. Khi đó $V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu thì diện tích toàn phần của chiếc xô phải bé nhất.

Ta có: $10l = 10dm^3 = 10000cm^3$.

Diện tích toàn phần của chiếc xô là:

$$S(x) = \pi x^2 + 2\pi xh = \pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = \pi x^2 + 2 \frac{10000}{x} = \pi x^2 + \frac{20000}{x}$$

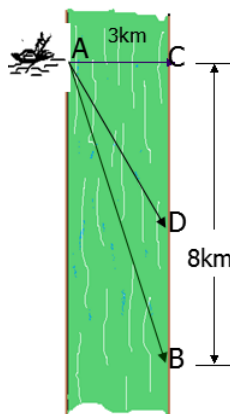
$$S'(x) = 2\pi x - \frac{20000}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 20000}{x^2}. \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - 20000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	$\searrow \quad \nearrow$ 2039,4		

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x = 10 \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 14,7(\text{cm})$.

Câu 16: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6km/h , chạy 8km/h và quãng đường $BC = 8\text{km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$

C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$

D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $CD = x$. Quãng đường chạy bộ $DB = 8 - x$ và quãng đường chèo thuyền $AD = \sqrt{9 + x^2}$.

Khi đó, thời gian chèo thuyền là $\frac{\sqrt{9 + x^2}}{6}$ và thời gian chạy bộ là $\frac{8 - x}{8}$.

Tổng thời gian mà người đàn ông cần có là:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}, \forall x \in [0; 8].$$

Ta có: $T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$.

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2 + 9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

Ta có: $T(0) = \frac{3}{2}$; $T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$; $T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6}$.

Do đó: $\min_{[0; 8]} T(x) = T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà người đàn ông cần dùng là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33(h)$ bằng cách chèo thuyền đến điểm D cách C một khoảng $\frac{9}{\sqrt{7}}(km)$ rồi từ đó chạy bộ đến điểm B .

- Câu 17:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A.** 216 (m/s) **B.** 30 (m/s) **C.** 400 (m/s) **D.** 54 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có : $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s).

- Câu 18:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A.** 24(m/s). **B.** 108(m/s). **C.** 18(m/s). **D.** 64(m/s).

Lời giải

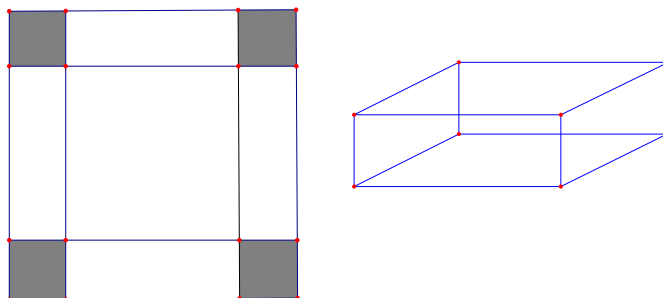
Chọn A

Ta có $v(t) = s'(t) = -\frac{3t^2}{2} + 12t$;

$v'(t) = -3t + 12; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

$v(0) = 0; v(4) = 24; v(6) = 18$. Suy ra vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong 6 giây đầu là 24(m/s).

- Câu 19:** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = 4$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \quad \forall x \in (0; 6)$

Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$ (loại).

x	0	2	6
y'		+	-
y			

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.

Câu 20: Một kiến trúc sư môn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$. Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:

A. $12m$.

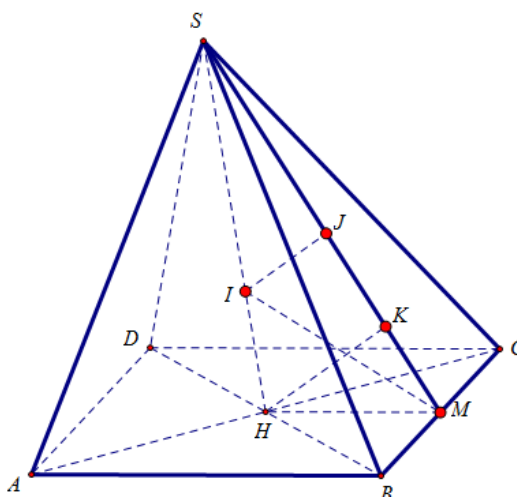
B. $18m$.

C. $36m$.

D. $24m$.

Lời giải

Chọn D



ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Giả sử kim tự tháp là hình chóp đều $S.ABCD$, gọi M là trung điểm của BC

Kẻ phân giác trong góc $\widehat{SMH}$ cắt SH tại I . I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đã cho

Từ I hạ IJ vuông góc (SBC) , Từ H hạ HK vuông góc (SBC) , $IJ=6$

$$\text{Theo Ta-lét. } \frac{SI}{SH} = \frac{IJ}{HK} \Leftrightarrow \frac{h-6}{h} = \frac{6}{HK} \Leftrightarrow HK = \frac{6h}{h-6}; SH = h; HM = \frac{a}{2}$$

$$HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} \Leftrightarrow \frac{6h}{h-6} = \frac{ah}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{144h^2}{h^2 - 12h} = \frac{144h}{h-12} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{144h}{h-12} h$$

Xét hàm

$$f(h) = \frac{h^2}{h-12} \Rightarrow f'(h) = \frac{h(h-24)}{(h-12)^2} \Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h=0 \\ h=24 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên có Thể tích V đạt GTNN khi $h=24$.

Câu 21: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi(m^3)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 2(m), h = 4(m)$ **B.** $R = 4(m), h = 2(m)$

C. $R = 3(m), h = 4(m)$ **D.** $R = 4(m), h = 4(m)$

Lời giải

Chọn A

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2}, (1)$$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R), (2)$$

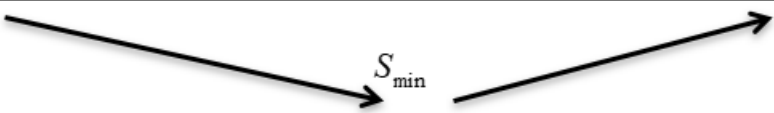
Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi R \left(\frac{16}{R^2} + R \right) = 2\pi \left(\frac{16}{R} + R^2 \right)$$

$$S'_{Tp} = 2\pi \left(-\frac{16}{R^2} + 2R \right) = \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8)$$

$$S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0	2	$+\infty$
$S'(R)$	-	0	+
$S(R)$			

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì $R=2(m)$ và chiều cao là $h=4(m)$.

Câu 22: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.

A. $x=6(cm)$ B. $x=3(cm)$ C. $x=2(cm)$

D. $x=4(cm)$

Lời giải

Chọn C

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gấp thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12-2x$

Ta có:

$$V = S.h = (12-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x \text{ với } 0 < x \leq 6$$

Câu toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

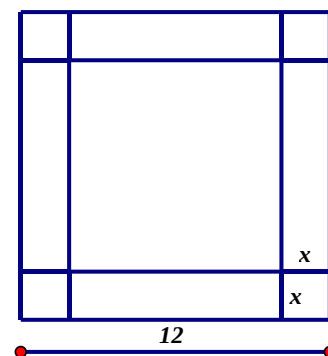
$$V' = 12x^2 - 96x + 144$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	6
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$		128	

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì $x=2cm$



Câu 23: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$

B. Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$

D. Dài $24cm$, rộng $19cm$

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm)$, ($x > 0$)

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\frac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là: $\frac{384}{x} + 4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S = (x + 6) \left(\frac{384}{x} + 4 \right) = 408 + 4x + \frac{2304}{x}$

Câu toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x) = 4 - \frac{2304}{x^2}$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{2304}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24(\text{t/m}) \\ x = -24(\text{loại}) \end{cases}$$

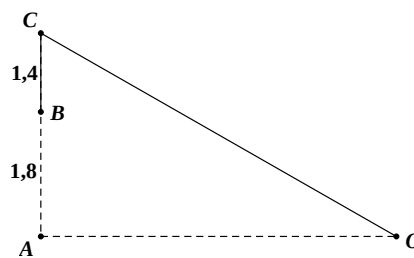
Bảng biến thiên

x	0	24	$+\infty$
$S'(x)$		0	
$S(x)$			

$S_{\min}$

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Câu 24: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



A. $AO = 2,4m$

B. $AO = 2m$

C. $AO = 2,6m$

D. $AO = 3m$

Lời giải

Chọn A

Đặt độ dài cạnh $AO = x(cm), (x > 0)$

Suy ra:

$$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\begin{aligned} \cos BOC &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \\ &= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \end{aligned}$$

Vì góc BOC là góc nhọn nên Câu toán trở thành Câu toán tìm x để

$$F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Đạt GTNN.

Đặt $(3, 24 + x^2) = t, (t > 3, 24)$.

$$\text{Suy ra } F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$$

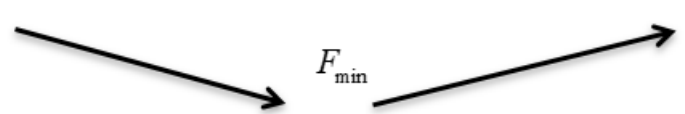
Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63) \left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right)$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right)$$

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

BBT

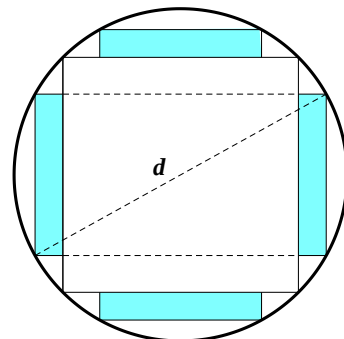
t	3,24	9	$+\infty$
F'(t)	-	0	+
F(t)			

$$\text{Thay vào đặt ta có: } (3, 24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4m$$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO = 2,4 m.

Câu 25: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d .

- A. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- B. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- C. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- D. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$



Lời giải

Chọn A

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y . Đường kính của khúc gỗ là d , khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}, 0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx} \text{ với } 0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}$$

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

Ta có:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx} + \frac{x(-8x - 2\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}} \\ &= \frac{-16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}} \end{aligned}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2 = 0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

X	0	$\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$	$\frac{(2-\sqrt{2})}{4}d$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$S_{\max}$	

Vậy miếng phụ có kích thước $x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d, y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$

- Câu 26:** Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?
- A.** Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu
B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu
C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu
D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

ĐĂNG KÍ KHÓA HỌC LIVESTREAM – CHÍNH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10 MÔN TOÁN!

Chọn A

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, ($x > 0, y > 0, h > 0, m$)

$$\text{Ta có: } \frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

$$\text{Thể tích hồ chứa nước } V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{576}{x(2x)} = \frac{288}{x^2}$$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x) = 2xy + 2xh + 2yh = 2x(2x) + 2x \frac{288}{x^2} + 2(2x) \frac{288}{x^2} = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

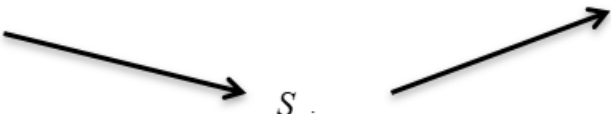
Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất.

$$S(x) = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{1728}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

BBT

X	0	6	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây: $432m^2$

Chi phí ít nhất là: $432 \times 500.000 = 216.000.000$

Câu 27: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R , nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$

B. $5R^2$

C. R^2

D. $3R^2$

Lời giải

Chọn C

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn ($0 < x < R$).

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (t/m)} \\ x = \frac{-R\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

BBT:

X	0	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	R
S'(x)	+	0	-
S(x)		R^2	

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2

Câu 28: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60cm, thể tích là 96.000cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m². Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

- A.** 83.200.000 đồng **B.** 382.000 đồng
C. 83.200 đồng **C.** 8.320.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600\text{cm}^2 = 0,16\text{m}^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, m)$

Chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm bể cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

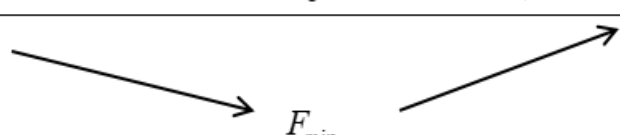
$$\begin{aligned} F(x) &= 0,16 \times 100.000 + 2,0,6x \cdot 70.000 + 2,0,6 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000 \\ &= 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x} \end{aligned}$$

Câu toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt GTNN.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0	0,4	$+\infty$
F'(x)	-	0	+
F(x)			

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

D. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con / m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

Lời giải

Trả lời: 512

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000(con)$

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:

$$1500 : 1000 = 1,5(kg).$$

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: $x(con), (x > 0)$

Theo đề Câu, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm 0,5kg / con

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm 0,0625x kg / con.

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500.$$

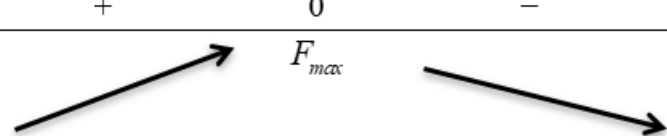
Câu toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt GTLN.

Ta có:

$$F'(x) = -0,125x + 61$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$$

BBT

X	0	488	1000
F'(x)	+	0	-
F(x)			

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ này là:

$$1000 - 488 = 512con$$

Câu 2: Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

Lời giải

Trả lời: $\frac{2}{27}$

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông x dm.

Khi đó chiều cao của hình hộp là $x(dm), \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

Và cạnh đáy của hộp là $(1-2x)dm$.

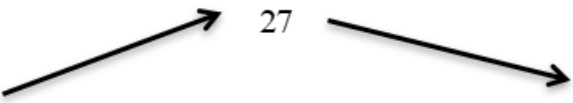
Vậy thể tích của hộp là: $V = x(1-2x)^2 dm^3$

Ta có:

$$V' = 1 - 8x + 12x^2$$

$$\text{Phương trình } V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

BBT

X	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
V'	+	0	-
V			

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{2}{27} dm^3$.

Câu 3: Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km **B.** 6,5km **C.** 5km **D.** 4km.

Lời giải

Trả lời: 6,5

Ta đặt: $B'C = x(km), (0 \leq x \leq 9)$

Ta có:

$$BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36 + x^2}, AC = 9 - x$$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

$$\text{Ta có: } F(x) = 130.000 \cdot \sqrt{36 + x^2} + 50.000(9 - x)(USD)$$

Câu toán trở thành tìm x sao cho $F(x)$ đạt GTNN.

$$F'(x) = \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}} x - 50.000.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}} x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Vì $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; 9]$ nên ta có:

$$F(0) = 1.230.000, F(9) = 1.406.000, F\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000$$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng $9km - 2,5km = 6,5km$.

Câu 4: Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 0,8

Giả sử tấm gỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền. Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, (0 < x < 0,6)$

Khi đó, cạnh huyền $BC = 1,2 - x$ Cạnh góc vuông còn lại là:

$$AC = \sqrt{(1,2 - x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$$

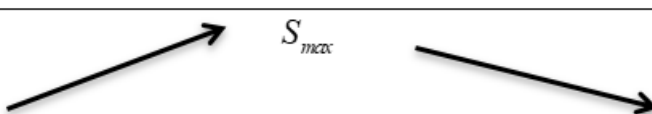
Ta có diện tích tam giác ABC: $S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{1,44 - 2,4x}$

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

$$S'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1,44 - 2,4x} - \frac{1}{2} \frac{1,2x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1,44 - 3,6x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} \right)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0	0,4	0,6
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Câu 5: Anh Tuấn muốn xây dựng một hồ ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chữ được 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hồ ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Lời giải

Trả lời: 160

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hồ ga, $(x > 0, y > 0, h > 0, \text{cm})$

Ta có: $\frac{h}{x} = 2 \Leftrightarrow h = 2x$

Thể tích hồ ga: $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{1600}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ ga là:

$$S(x) = xy + 2xh + 2yh = x \cdot \frac{1600}{x^2} + 2x \cdot 2x + x \cdot \frac{1600}{x^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{1600}{x} + 4x^2 + \frac{6400}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x}$$

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất.

$$S'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

BBT

X	0	10	$+\infty$
$S'(x)$	–	0	+
$S(x)$			

Vậy chiều rộng của hồ ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hồ ga nhỏ nhất là: $S = 10.16 = 160cm^2$.

Câu 6:

Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.

Lời giải

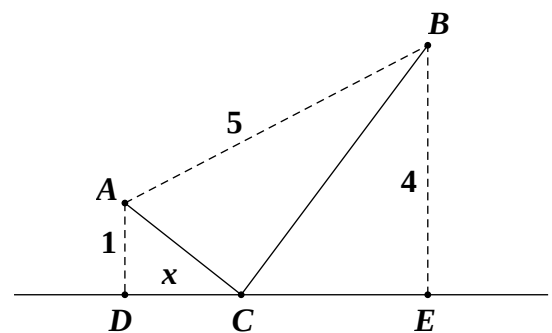
Trả lời: $\sqrt{41}$

Đặt $CD = x, x > 0$. Ta tính được $DE = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = 4$

Ta có $AC + BC = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16} = f(x)$

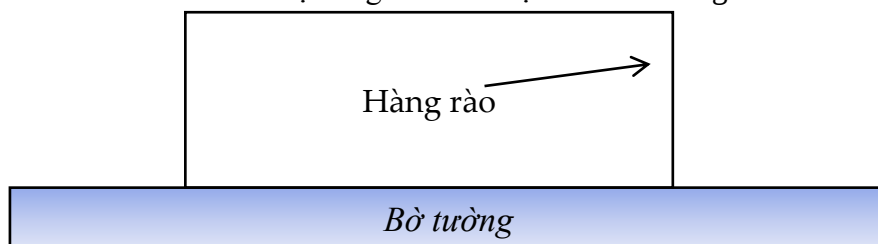
Khi đó: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}$

Lời giải phương trình $f'(x) = 0$, ta thu được $x = \frac{4}{5}$ và tìm được min $f(x) = \sqrt{14}$,



Câu 7:

Bác nông dân muốn làm hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



Lời giải

Trả lời: 5000

Đề Câu cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là 200m. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r, đến đây ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có:

$$x + 2r = 200 \Leftrightarrow r = 100 - \frac{x}{2}. \text{ Từ đây ta có } r > 0 \Rightarrow x < 200.$$

Diện tích đất rào được tính bởi: $f(x) = x\left(100 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 100x$

Xét hàm số $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 100x$ trên khoảng $(0; 200)$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn. ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Từ đó ta có $f(100) = 5000$ là GTLN của diện tích đất rào được.

Câu 8: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dài ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1000π

Gọi $x(cm)$; $y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ ($x, y > 0; x < 30$)

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $(2x + y) \cdot 4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2 (30 - 2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2 (30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt GTLN

$$f'(x) = -6x^2 + 60x, \text{ cho } f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là:

$$V = 1000\pi (cm^3).$$

Câu 9: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

Lời giải

Trả lời: 0,68

$$\text{Ta có } S_p = S_{xq} + 2S_d = 2\pi r l + 2\pi r^2 \quad (1)$$

$$V = \pi r^2 l = 2 \Rightarrow l = \frac{2}{\pi r^2} \text{ thay vào (1) ta được:}$$

$$S_p = \frac{4}{r} + 2\pi r^2 = f(r)$$

$$f'(r) = -\frac{4}{r^2} + 4\pi r$$

$$f'(r) = 0 \text{ khi } r \text{ gần bằng } 0,68.$$

Câu 10: Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h , có thể tích là $1m^3$. Với a như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

Lời giải

Trả lời: 1



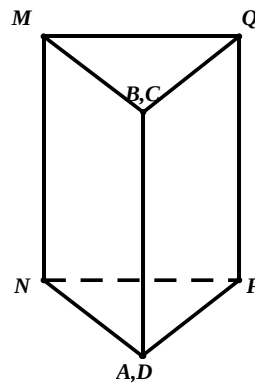
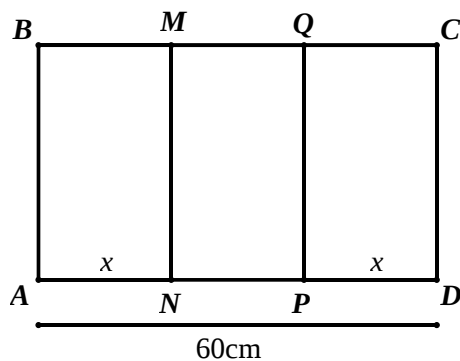
$$V = a^2 h = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$S = 4ah + 2a^2 = \frac{4}{a} + 2a^2 = f(a)$$

$$f'(a) = -\frac{4}{a^2} + 4a$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = 1$.

Câu 11: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60\text{cm}$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



A. $x = 20$

B. $x = 30$

C. $x = 45$

D. $x = 40$

Lời giải

Trả lời:20

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác NAP = S_{NAP}

$$\text{Ta có: } m_a = \sqrt{\frac{4x^2 - (60 - 2x)^2}{4}} = \sqrt{-900 + 60x}$$

$$V = h \cdot m_a \cdot NP$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{60x - 900} (60 - 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{60(60 - 2x)}{2\sqrt{60x - 900}} - 2\sqrt{60x - 900}$$

$$f'(x) = 0, \quad f(x) \rightarrow \max \text{ khi } x = 20.$$

Quý phụ huynh và các em học sinh đky khóa học

1. Zalo thầy Thuận Toán: 0869998668

zalo.me/84869998668

2. Facebook thầy:

<https://www.facebook.com/Thaygiaothuan.99/>

3. Fanpage thầy:

<https://www.facebook.com/thaythuandaytoan>

4. Tiktok thầy:

https://www.tiktok.com/@thay_hothucthuan